

**UNIVERSITETET I OSLO**  
**Fysisk institutt**

# **Adaptiv Friksjons- kompensering**

Masteroppgave

Gustav F. Seiff

**27. mai 2011**





# Forord

Denne oppgaven er skrevet som det avsluttende arbeidet for mastergraden min i industriell matematikk og kybernetikk ved Fysisk institutt, matematisk naturvitenskaplig fakultet ved Universitetet i Oslo.

Oppgaven som skulle løses er levert av Kongsberg Protector Systems (KPS) som er et eget forretningsområde innenfor Kongsberggruppen ASA. Oppgaven skal se på forskjellige friksjonsmodeller for adaptiv friksjonskompensering langs main azimuth aksene til en observasjonsplattform med et harmonicdrive gear.

Vil rette en spesiell takk til min veileder Professor Åge Skullestad og Øystein Bordvik hos KPS for god hjelp under arbeidet med oppgaven.

Oslo, Mai 2011

---

Gustav F. Seiff



# Sammendrag

Denne oppgaven har sett på metoder for kompensasjon av friksjon i et Harmonic Drive gear som sitter på main azimuth aksen av en observasjonsplattform. Det har blitt sett på teorien bak friksjon med tanke på kompensasjon og spesielt sett på de to modellene Dahl's og LuGre modell.

Det er i tillegg blitt laget en ny modell for friksjon som har blitt kalt Extended Dahl's modell. Denne er laget på bakgrunn av egenskaper ved Dahl's og LuGre modellene og er tenkt brukt på systemer der man ikke har gode nok måledata tilgjengelig.

På bakgrunn av informasjon, og en modell av azimuth gimballen, levert av KPS er det utviklet en adaptiv friksjonskompensator basert på Dahl's, LuGre og Extended Dahl's modellene ved bruk av en observer/Kalman filter.

Et extended kalmanfilter er utviklet for å estimere nødvendige friksjonsparametre på bakgrunn av simuleringsdata og måledata tatt opp på et reelt systemet hos KPS.

Det er utviklet simulerings og implementeringsmodeller for de tre friksjonsmodellene og disse er testet på azimuth modellen via simuleringer. Resultatene er sammenlignet i forhold til hvor god kompensasjon de ulike modellene gir i forhold til systemer med og uten friksjon.

Resultene viser at alle modellene gir oss en klar forbedring. Det er også vist ved simulering at Extended Dahl's modellen gir gode resultater sammenlignet med LuGre modellen i de tilfellene hvor vi ikke klarer å tilfredstille optimale krav med hensyn til samplingstider og oppløsning.



# Innhold

Forord . . . . .	i
Sammendrag . . . . .	iii
Liste over figurer og tabeller . . . . .	viii
<b>1 Innledning</b>	<b>1</b>
1.1 Om oppgaven og problemstillingen . . . . .	1
1.2 Opplysninger om systemet . . . . .	1
1.3 Friksjonskompensasjon . . . . .	2
1.4 Oppbygning av oppgaven . . . . .	2
1.5 Nomenklatur og forkortelser . . . . .	4
<b>2 Friksjons teori</b>	<b>7</b>
2.1 Friksjon . . . . .	7
2.1.1 Noen definisjoner . . . . .	7
2.2 De klassiske . . . . .	8
2.2.1 Coulomb Friksjon . . . . .	8
2.2.2 Viskøs Friksjon . . . . .	8
2.2.3 Drag Friksjon . . . . .	8
2.2.4 Stiction . . . . .	8
2.3 Stribeck effekten . . . . .	8
2.4 Statisk friksjon og sticktionskraften . . . . .	10
2.5 Forsinkelse og Hysterese oppførsel . . . . .	11
2.6 Stick-slip og oscilatorisk oppførsel . . . . .	11
2.7 Dynamiske friksjonsmodellering . . . . .	13
<b>3 Friksjonsmodellene</b>	<b>15</b>
3.1 Dahl's modellen . . . . .	15
3.2 LuGre modellen . . . . .	18
3.2.1 Noen modell egenskaper . . . . .	19
3.3 Kommentar til friksjonsparametrene . . . . .	22
3.4 Extended Dahl's modellen . . . . .	27
3.4.1 En ny tilpasset Dahl's modell . . . . .	27
3.4.2 Noen modell egenskaper . . . . .	28
3.4.3 Sammenlikning av modellene . . . . .	29

<b>4</b>	<b>Estimering av friksjonsparametre</b>	<b>35</b>
4.1	Extended kalmanfilter . . . . .	36
4.1.1	Utleddning av det diskrete extended kalmanfilteret . . . . .	37
4.2	Utvidelse av systemet . . . . .	38
4.3	Kommentar til de partiellderiverte . . . . .	39
4.4	Algoritmen for parameterestimering . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Kompensasjonsmodellene</b>	<b>41</b>
5.1	Kompensasjonsmodellen for simulering . . . . .	41
5.2	Kompensasjonsmodellen for Implementering . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Resultater</b>	<b>45</b>
6.1	Generering av data . . . . .	45
6.2	Simulering med genererte data . . . . .	46
6.2.1	Resultater av parameterestimering . . . . .	46
6.2.2	Sammenligning av simuleringsmodell 1KHz . . . . .	49
6.2.3	Sammenligning av simuleringsmodell 10KHz . . . . .	50
6.2.4	Sammenligning av implementeringsmodell . . . . .	51
6.3	Parameterestimering med reelle data . . . . .	55
6.4	Testing av estimerte parametre . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Konklusjon</b>	<b>59</b>
7.1	Drøfting av resultater . . . . .	59
7.2	Videre arbeid . . . . .	61
<b>A</b>	<b>Vedlegg til Dahl's modellen</b>	<b>65</b>
A.1	Systemmodellen og matrisene . . . . .	65
A.2	Utvidet systemmodell matriser . . . . .	66
A.3	Lineariserte matriser for Dahl's modellen . . . . .	66
A.4	EKF for parameterestimering . . . . .	68
A.5	EKF for testing . . . . .	70
<b>B</b>	<b>Vedlegg til LuGre modellen</b>	<b>73</b>
B.1	Systemmodellen og matrisene . . . . .	73
B.2	Utvidet systemmodell matriser . . . . .	74
B.3	Lineariserte matriser for for LuGre modellen . . . . .	75
B.4	EKF for parameterestimering . . . . .	78
B.5	EKF for testing . . . . .	81
<b>C</b>	<b>Vedlegg til Extended Dahl's modellen</b>	<b>83</b>
C.1	Systemmodellen og matrisene . . . . .	83
C.2	Utvidet systemmodell matriser . . . . .	84
C.3	Lineariserte matriser for for Extended Dahl's modellen . . . . .	85
C.4	EKF for parameterestimering . . . . .	87
C.5	EKF for testing . . . . .	90



<b>D</b>	<b>Simuleringsmodellene og matriser</b>	<b>93</b>
D.1	Simuleringsmodellen for Dahl's modellen . . . . .	93
D.2	Simuleringsmodellen for LuGre modellen . . . . .	94
D.3	Simuleringsmodellen for Extended Dahl's modellen . . . . .	96
D.4	Matlabkode for KF blokken og tilhørende matriser . . . . .	97
<b>E</b>	<b>Implementeringsmodellene og matriser</b>	<b>99</b>
E.1	Implementeringsmodellen for Dahl's modellen . . . . .	99
E.2	Implementeringsmodellen for LuGre modellen . . . . .	101
E.3	Implementeringsmodellen for Extended Dahl's modellen . . . . .	103
E.4	Matrisene $A$ og $A_{lin}$ for Dahl's og Extended Dahl's . . . . .	105
E.5	Matrisene $A$ og $A_{lin}$ for LuGre . . . . .	105
<b>F</b>	<b>Parameterestimering med KPS data</b>	<b>107</b>
F.1	Tabell med resultater av parameterestimering . . . . .	107
F.2	Plot for parameterestimering . . . . .	108
F.2.1	Dahl's modell . . . . .	108
F.2.2	LuGre modellen . . . . .	109
F.2.3	Extended Dahl's modell . . . . .	110
<b>G</b>	<b>Noen simulerte eksperimenter</b>	<b>111</b>
G.1	Lite Stick-Slip eksperiment . . . . .	111
G.1.1	Simulink modellen . . . . .	111
G.1.2	Karnoppmodellen brukt i simulink . . . . .	111
G.1.3	Matlab simulerings fil . . . . .	112
G.2	Hysteres eksperiment for LuGre modellen . . . . .	113
G.2.1	Simulink modellen . . . . .	113
G.2.2	Matlab simulerings fil . . . . .	113
G.3	Presliding eksperiment for friksjonsmodellene . . . . .	114
G.3.1	Simulink modellen . . . . .	114
G.3.2	Matlab simulerings fil . . . . .	114
<b>H</b>	<b>Modellen levert fra KPS</b>	<b>117</b>
H.1	Simulinkmodellen levert av KPS . . . . .	117
H.2	Matlabkode med parametre til simulinkmodellen . . . . .	117



# Figurer

2.3.1	Stribeck kurven viser forholdet mellom friksjonskraft og hastighet. Legg merke til hvordan kurven er avhengig av stiction, coulomb og den viskøse friksjonen. Dette er modellspesifikke parametere som igjen kan være avhengige av ytre påvirkninger som for eksempel temperatur, smøremidler og slitasje. . . . .	9
2.4.1	Sammenhengen mellom Friksjonskraften og forflytning som ble funnet ved eksperimenter av Rabinowicz [18]. (Figuren er hentet fra [16]) . . .	10
2.4.2	Pre-sliding forskyvning funnet i [7]. Senkes tilført kraft vil dette forårsake en permanent forskyvning som vist med de stiplede linjene. (Figuren er hentet fra [16]) . . . . .	10
2.5.1	Forholdet mellom hastighet og friksjon får en hystereselignende oppførsel. Legg merke til at friksjonen er lavere for avtagende hastighet i forhold til økende. (Figuren er hentet fra [16]). . . . .	11
2.6.1	Oppsett for lite stick-slip eksperiment. . . . .	12
2.6.2	Plott av lite stick-slip eksperiment. . . . .	12
2.7.1	Haessing og Friedland så på kontakten mellom to flater som elastiske børstehår. Figuren er hentet fra [20]. . . . .	13
3.1.1	Pre-sliding forskyvningen for Dahl's Modellen . . . . .	17
3.2.1	Hysteres oppførsel for LuGre modellen. Figuren viser resultat av liknende eksperiment som Hess og Soom beskrev i [10,16]. Hastigheten med høyest frekvens har videst hystereseløype. . . . .	20
3.2.2	Pre-sliding forskyvningen for LuGre Modellen. . . . .	21
3.3.1	Simulering stibeck funksjonen for LuGre modellen. . . . .	23
3.3.2	Simulering av LuGre modellen med forskjellige verdier for $\sigma_0$ . . . . .	24
3.3.3	Simulering av LuGre modellen med forskjellige verdier for $\sigma_1$ . . . . .	25
3.3.4	Simulering av bidragene til funksjonen $F_f$ for LuGre modellen . . . . .	25
3.4.1	Pre-sliding forskyvningen for Extended Dahl's Modellen . . . . .	29
3.4.2	Samplingsfrekvens 1KHz. Her ser man at Extended dahl's gir tilnærmet like resultater som LuGre (NB! y-aksen er forskjellig på plottene). Se tabell 3.4.3 for middelerverdier (mean) og standardavvik (std). . . . .	31

3.4.3 Samplingsfrekvens 10KHz. Her ser man at LuGre og Extended Dahl's modellene gir en klar forbedring av feilen. Vi ser også at Dahl's modellen som ikke tar med sticktion og stribeck effekten ikke har nevneverdig forbedring ved høyere samplingsfrekvens. (NB! y-aksen er forskjellig på plottene). Se tabell 3.4.3 for middelerverdier (mean) og standardavvik (std). . . . .	31
3.4.4 Samplingsfrekvens 1KHz. Her ser man at Extended dahl's gir tilnærmet like resultater som LuGre. Men vi vil ikke klare å kompensere friksjonen helt ved så lav samplingsfrekvens. . . . .	32
3.4.5 Samplingsfrekvens 10KHz. Her ser man at LuGre og Extended Dahl's modellene gir en klar forbedring. Vi ser også at Dahl's modellen som ikke tar med sticktion og stribeck effekten ikke gir nevneverdig forbedring ved høyere samplingsfrekvens. . . . .	33
4.1.1 Simulink modellen av RWS med friksjon tilført med en LuGre modell. På inngangen tilføres pådragsmomentet og det er tilgjengelig målinger for last- og motor- posisjon. Modellen er levert av KPS med unntak av den tilførte friksjonen . . . . .	36
5.1.1 Generelt blokkskjema for simuleringsmodellen. . . . .	41
5.1.2 Simuleringsmodellen laget i simulink. Her vises den for LuGre modellen. . . . .	42
5.1.3 Friksjonsmodell-blokken for LuGre modellen laget i simulink. . . . .	42
5.1.4 Blokkskjema for system tilført friksjon og friksjonskompensasjon . . . . .	43
5.2.1 Blokkskjema for systemet med implementeringsmodellen . . . . .	44
5.2.2 Implementeringsmodellen laget i simulink. Her vises den for Extended Dahl's modellen. . . . .	44
6.2.1 Plott for estimerte parametre Dahl's modell . . . . .	48
6.2.2 Plott for estimerte parametre LuGre modell . . . . .	48
6.2.3 Plott for estimerte parametre Extended Dahl's modell . . . . .	48
6.2.4 Samplingsfrekvens 1KHz. Her ser man at Extended dahl's gir tilnærmet like resultater som LuGre (NB! y-aksen er forskjellig i plottene). Se tabell 6.2.5 for middelerverdier (mean) og standardavvik (std). . . . .	49
6.2.5 Samplingsfrekvens 1KHz. Her ser man at alle modellene gir tilnærmet like resultater. Men vi vil ikke klare å kompensere friksjonen helt ved så lav samplingsfrekvens. . . . .	50
6.2.6 Samplingsfrekvens 10KHz. Her ser man at LuGre og Extended Dahl's modellene gir en klar forbedring av feilen. Vi ser også at Dahl's modellen som ikke tar med sticktion og stribeck effekten ikke har nevneverdig forbedring ved høyere samplingsfrekvens. (NB! y-aksen er forskjellig på plottene). Se tabell 6.2.6 for middelerverdier (mean) og standardavvik (std). . . . .	51
6.2.7 Samplingsfrekvens 10KHz. Her ser man at LuGre og Extended Dahl's modellene gir en klar forbedring. Vi ser også at Dahl's modellen som ikke tar med sticktion og stribeck effekten ikke gir nevneverdig forbedring ved høyere samplingsfrekvens. . . . .	52
6.2.8 Signalet tilført ved sammenligning av implementeringsmodellene. . . . .	52

6.2.9 Feilen til posisjonen ved simulering med implementeringsmodellen (NB! y-aksen er forskjellig på plottene). Se tabell 6.2.7 for middelerverdier (mean) og standardavvik (std).	53
6.2.10 Sammenligning av lastposisjon for de tre modellene.	54
6.2.11 Sammenligning av lastposisjon for de tre modellene forstørret. Legg merke til at Dahl's modellen har størst problemer i denne fasen	54
6.4.1 Feilen til posisjonen testet med EKF. Se tabell 6.4.2 for middelerverdier (mean) og standardavvik (std).	57
D.1.1 Simuleringsmodellen for Dahl's modellen	93
D.1.2 Friksjonsmodell-blokken for Dahl's modellen laget i simulink.	93
D.2.1 Simuleringsmodellen for LuGre modellen	94
D.2.2 Friksjonsmodell-blokken for LuGre modellen laget i simulink.	94
D.3.1 Simuleringsmodellen for Extended Dahl's modellen	96
D.3.2 Friksjonsmodell-blokken for Extended Dahl's modellen laget i simulink.	96
E.1.1 Implementeringsmodellen for Dahl's modellen	99
E.2.1 Implementeringsmodellen for LuGre modellen	101
E.3.1 Implementeringsmodellen for Extended Dahl's modellen	103
F.1.1 Resultatene for alle måleseriene og midlede parametre	107
F.2.1 Plott for estimerte parametre Dahl's modell med dataserie D1	108
F.2.2 Plott for estimerte parametre Dahl's modell med dataserie D2	108
F.2.3 Plott for estimerte parametre Dahl's modell med dataserie D3	108
F.2.4 Plott for estimerte parametre LuGre modell med dataserie D1	109
F.2.5 Plott for estimerte parametre LuGre modell med dataserie D2	109
F.2.6 Plott for estimerte parametre LuGre modell med dataserie D3	109
F.2.7 Plott for estimerte parametre Extended Dahl's modell med dataserie D1	110
F.2.8 Plott for estimerte parametre Extended Dahl's modell med dataserie D2	110
F.2.9 Plott for estimerte parametre Extended Dahl's modell med dataserie D3	110
G.1.1 Simuleringsmodell for lite stick-slip eksperiment.	111
G.2.1 Simuleringsmodell hysteresis eksperiment.	113
G.3.1 Simuleringsmodell for presliding eksperiment.	114
H.1.1 Simulinkmodellen levert av KPS	118



# Tabeller

3.1.1 Verdiene brukt til simuleringen av pre-sliding eksperiment . . . . .	16
3.2.1 Verdiene brukt til simuleringen av pre-sliding eksperiment . . . . .	22
3.3.1 Friksjonsparametre som brukes i LuGre modellen for å tilføre friksjon i systemet . . . . .	23
3.3.2 Anbefalinger Olsson gir i [17]. $I_s$ er den totale tregheten til systemet. .	24
3.4.1 Verdiene brukt til simuleringen av pre-sliding eksperiment . . . . .	29
3.4.2 Verdiene brukt ved både tilføring og kompensasjon i sammenligningene.	30
3.4.3 Middelverdier og standardavvik til feilen, se også figur 3.4.2 og 3.4.3. .	30
3.4.4 RMS verdiene til feilen ved 1KHz og 10KHz samplingsfrekvens. Se likning 3.4.10 for utregning . . . . .	30
6.0.1 De aktuelle systemparametrene levert av KPS. . . . .	45
6.1.1 Friksjonsparametre som brukes i LuGre modellen for å tilføre friksjon i systemet . . . . .	46
6.2.1 Middelverdi og varians for støyen . . . . .	46
6.2.2 Diagonalelementene for inital kovarians . . . . .	47
6.2.3 Initialverdiene til de ukjente parametrene brukt under parameteresti- meringen . . . . .	47
6.2.4 Resultater av parameterestimering med genererte data. . . . .	47
6.2.5 Middelverdier, standardavvik og RMS til feilen simulert ved 1KHz samplingfrekvens, se også figur 6.2.4. . . . .	49
6.2.6 Middelverdier, standardavvik og RMS til feilen simulert ved 10KHz samplingfrekvens, se også figur 6.2.6. . . . .	50
6.2.7 Middelverdier, standardavvik og RMS til feilen simulert ved 1KHz samplingfrekvens, se også figur 6.2.9. . . . .	52
6.3.1 Middelverdi og varians for støyen . . . . .	55
6.3.2 Diagonalelementene for inital kovarians . . . . .	55
6.3.3 Initialverdiene til de ukjente parametrene brukt under parameteresti- meringen . . . . .	55
6.3.4 Resultater av parameterestimering med data tatt opp hos KPS. Parameterestimatene er middelverdien av parametrene estimert ved tre forskjellige måleserier. . . . .	56
6.4.1 RMS til sammenlikning av lastposisjon testet med EKF, se også figur 6.4.1. . . . .	56
6.4.2 Middelverdier til sammenlikning av lastposisjon testet med EKF, se også figur 6.4.1. . . . .	57





# Kapittel 1

## Innledning

### 1.1 Om oppgaven og problemstillingen

Kongsberg Protector Systems (KPS) er et eget forretningsområde innenfor Kongsberg Gruppen ASA. Hovedproduktet til KPS er protector som består av en toakset gimbal. Denne styrer en observasjonsplattform hvor hver gimbalakse blir styrt av en børsteløs AC motor i en lukket servosløyfe. Hver av sløyfene er stabilisert. Motoren er gearret ned med et Harmonic Drive gear. Det viser seg at Friksjon forårsaker et reguleringsavvik i systemet.

Oppgaven skal se på forskjellige friksjonsmodeller for adaptiv friksjonskompensering langs main azimuth aksen til observasjonsplattformen.

KPS har tidligere gjort noen initielle forsøk med adaptiv friksjonskompensering basert på “Friedland & Park 1992”. Disse forsøkene gir lovende resultater når kommandoene til servosystemet hentes fra styrestikken og feedbacksignalet hentes fra motorenes vinkelencoder. Når servoene kjører i stabilisert mode blir feedbacksignalet hentet fra en gyro montert på mainframe. Dette forårsaker ustabilitet i friksjonskompensatoren pga. fleksibilitet i drivlinja. Det antas at fleksibiliteten ligger i Harmonic Drive giret.

Det sees på friksjon i Harmonic Drive gearret som sitter på main azimuth aksen av gimballen. Det vil bli tatt utgangspunkt i at man kun kjenner last- og motorposisjon samt pådraget ut av regulatoren. Motorposisjonen er hentet fra en vinkelencoder og lastposisjonen hentes fra et potmeter som dekodes av en AD konverter.

### 1.2 Opplysninger om systemet

Nedenfor listes noen relevante opplysningene om systemet, se også vedlegg H for simulink modell og parameterfil levert av KPS.

- Enkoder på motor aksling har en oppløsning på 5656 pulser pr omdreining.
- Potmetermålingene på last akslingen har en oppløsning på 12 bit som gir oss en 4096 step pr omdreining.

- Samplingfrekvensen for motor- og last- målinger i systemet er på 1Khz.
- Pådraget ut fra regulatoren kan variere mellom  $\pm 100$  prosent. Dette skaleres ned med en faktor  $K_{Skale}K_t$  for å finne motormomentet.
- Det er ikke gitt noe opplysninger eller data vedrørende prosess- og målestøy.
- Det er ikke gitt noen opplysninger vedrørende fysiske mål, vekt ol. for systemet.

### 1.3 Friksjonskompensasjon

Friksjonskompensasjonen vil består av flere trinn; Først må det genereres eller tas opp måleserier, så estimeres det parametre for den valgte modellen. Denne testet ved simulering for å se på forbedringer for posisjonsfeilen. Valgte parametre kan da benyttes i implementeringen, og friksjonsestimatet kan legges til pådraget ut fra regulatoren.

### 1.4 Oppbygning av oppgaven

Organisering og oppbygning av oppgaven er som følger:

- **Kapittel 2:** Det blir sett på generell friksjons- teori og modeller med tanke på friksjonskompensasjon.
- **Kapittel 3:** Det blir sett på teorien bak de to dynamiske modellene Dahl's og LuGre modell. Det blir også presentert en ny modell for friksjon kalt Extended Dahl's modell.
- **Kapittel 4:** Det blir sett på parameterestimering ved bruk av extended kalmanfilter.
- **Kapittel 5:** Ser på modellene som er laget for kompensasjon av friksjon.
- **Kapittel 6:** Presenterer resultater av parameterestimering og simuleringer med estimerte parametre.
- **Kapittel 7:** Konklusjon ved drøfting av resultater og forslag til videre arbeid.
- **Vedlegg A-C:** Systemmodeller, matriser og matlab kode for henholdsvis Dahl's, LuGre og Extended Dahl's modellene
- **Vedlegg D:** Modeller og underlag for simuleringsmodellene.
- **Vedlegg E:** Modeller og underlag for implementeringsmodellene.
- **Vedlegg F:** Resultater av parameterestimering ved bruk av KPS data.

- **Vedlegg G:** Matlab kode og simulinkmodeller som er brukt for simulering av mindre eksperimenter brukt i rapporten.
- **Vedlegg H:** Simulink modellen og matlabkode levert av KPS for azimuth gimballen.

## 1.5 Nomenklatur og forkortelser

### Nomenklatur

$\alpha_0$  og  $a_0$  - Parameter for coulombfriksjonen.

$\alpha_1$  og  $a_1$  - Parameter for differansen mellom stictionskraften og coulombfriksjonen.

$\alpha_2$  og  $a_2$  - Parameter for viskøs friksjonskoeffisient.

$I_l$  og  $I_2$  - Treghetsmomentet til last.

$I_m$  og  $I_1$  - Treghetsmomentet til motor.

$I_s$  - Treghetsmomentet til systemet.

$K_{Scale}$  - Skaleringsfaktor for pådraget.

$K_t$  - Motor konstanten.

$\underline{p}$  - Parametervektor.

$P$  - Kovarians matrise

$P_k^-$  - Kovariansen til den estimerte tilstanden  $\hat{x}_k^-$

$P_k^+$  - Kovariansen til den estimerte tilstanden  $\hat{x}_k^+$

$\sigma_0$  og  $s_0$  - Parameter for mikrostivhet.

$\sigma_1$  og  $s_1$  - Parameter for mikrodempning.

$sgn(x)$  - Signum til x

$\Theta_l$  - Posisjon lastaksling.

$\dot{\Theta}_l$  - Hastighet lastaksling.

$\Theta_m$  - Posisjon motoraksling.

$\dot{\Theta}_m$  - Hastighet motoraksling.

$v_0$  - Stribeck hastigheten.

$\hat{x}$  - x estimert.

$\hat{x}_k^-$  - Estimatet av  $x_k$  før måleoppdatering ved tiden  $k$

$\hat{x}_k^+$  - Estimatet av  $x_k$  etter måleoppdatering ved tiden  $k$

$\vec{x}$  og  $\underline{x}$  - x vektor, tilstandsvektor for systemet.

$z$  - Tilstand som beskriver gjennomsnittlig avbøyning av kontaktpunktene.

### **Forkortelser**

- DL - Dahl's modellen.
- EDL - Extended Dahl's modellen.
- EKF - Extended Kalmanfilter.
- KF - Kalmanfilter.
- KPS - Kongsberg Protech Systems.
- LG - LuGre modellen.
- ODE - Ordinær Differensiallikning
- RWS - Observasjonsplattformen.



## Kapittel 2

# Friksjons teori

### 2.1 Friksjon

Friksjon eksisterer i alle mekaniske systemer der flater er i relativ bevegelse til hverandre og spiller derfor en viktig rolle i mange servosystemer. Det er et naturlig fenomen som anses vanskelig å modellere, om ikke umulig, og det har derfor ofte tidligere blitt sett bort fra ved modellering av servosystemer [21]. Det er et ulineært fenomen som kan forringe ytelsen og gi uønsket oppførsel for et system. Det er i senere tid blitt viet større fokus til dette temaet.

Alle overflater er ujevne på et mikroskopisk nivå, og flatene er kun i kontakt med hverandre ved et gitt antall skarpe overganger. Disse punktene kan sees på som små fjærer eller børstehår og vil ved forskyvning strekkes til de ryker. Det er den kraften som motvirker bevegelsen inntil bristepunktet som kalles friksjonskraften. I større skala vil denne være påvirket av mange faktorer som smøremidler, hastighet, temperatur, normalkraften og tidligere bevegelse.

Friksjon kan deles inn i to hovedgrupper, statisk og dynamisk. Tradisjonelt har friksjon blitt modellert som en statisk funksjon avhengig av hastighet og tilført kraft. Resultatene har ikke alltid vært tilfredsstillende i systemer med lav hastighet og høye krav til presisjon på posisjonering.

#### 2.1.1 Noen definisjoner

Det vil nedenfor bli gitt noen definisjoner som brukes gjennom oppgaven.

$F_c$ : Coulomb friksjon. Den delen av friksjon hvor størrelsen på hastigheten er uavhengig av friksjonskraften.

$F_v$ : Viskøs friksjon. Friksjonskraften fra to legemer som har innbyrdes relativ enhetshastighet.

$F_s$ : Stictions kraften. Kraften som forhindrer to legemer å forflytte seg relativt til hverandre når den relative hastigheten er null.

$F_f$ : Den totale friksjonskraften som virker på de to legemene.

$F_e$ : Den påtrykte kraften eller ytre kraft som påvirker systemet.

## 2.2 De klassiske

Nedenfor er det presenteres det som kalles de klassiske friksjonsmodellene. Ofte brukes kombinasjoner av disse i hovedsak; coulomb, viskøs og stiction [21].

### 2.2.1 Coulomb Friksjon

Coulomb friksjon, eller tørrfriksjon, er: i) uavhengig av arealet til kontaktflaten, ii) alltid motsatt rettet av relativ bevegelse og iii) uavhengig av den relative hastigheten. Det er også vanlig å modellere denne som et bidrag av størrelsen til normalkraften  $F_n$  skalert med materialets friksjons koeffisienten  $\mu$ .

$$F_f = F_c \operatorname{sgn}(\dot{x}) = \mu |F_n| \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (2.2.1)$$

### 2.2.2 Viskøs Friksjon

Viskøs friksjon er friksjon som oppstår når kontaktflatene er påført smøremidler. Denne er proporsjonal med hastigheten.

$$F_f = F_v \dot{x} \quad (2.2.2)$$

### 2.2.3 Drag Friksjon

Drag friksjon er friksjonen av et objekt som beveges gjennom en væske og den er proporsjonal med kvadratet av hastigheten. Ved lave hastigheter er denne friksjonen neglisjerbar.

$$F_f = F_d |\dot{x}| \dot{x} \quad (2.2.3)$$

### 2.2.4 Stiction

Stiction er den friksjonskraften som holder igjen objektet når det er stillestående så lenge momentet er lavere enn maksimum stictionskraft  $F_s$ .

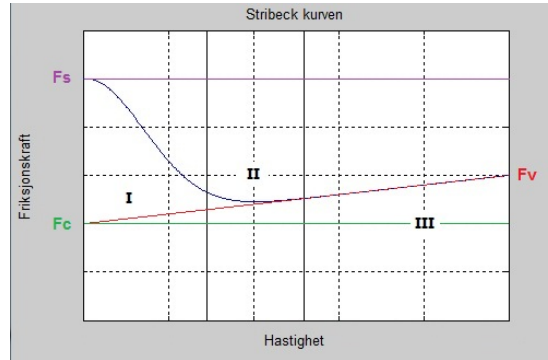
$$F_f = \begin{cases} u & , |u| < F_s \\ F_s \delta(\dot{x}) \operatorname{sgn}(u) & , |u| \geq F_s \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Hvor  $\delta(\dot{x})$  er dirac delta funksjonen med hensyn på hastigheten. Det vil bli sett grundigere på denne friksjonskraften i avsnitt 2.4.

## 2.3 Stribeck effekten

Stribeck oppdaget at friksjonskraften ikke er diskontinuerlig men en hastighets avhengig kontinuerlig funksjon [16]. Dette kom Stribeck frem til gjennom eksperimenter gjort ved konstante hastigheter. Denne vil typisk se ut som kurven i figur 2.3.1. Forholdet kalles stribeck kurven, spesielt forholdet i fase I og II som kalles stribeck effekten. Ingen generell funksjon kan beskrive denne kurven da denne er avhengig av systemet friksjonen opererer på som igjen er avhengig av material egenskaper og andre ytre påvirkninger som for eksempel temperatur,





Figur 2.3.1: Stribeck kurven viser forholdet mellom friksjonskraft og hastighet. Legg merke til hvordan kurven er avhengig av stiction, coulomb og den viskøse friksjonen. Dette er modellspesifikke parametre som igjen kan være avhengige av ytre påvirkninger som for eksempel temperatur, smøremidler og slitasje.

smøremidler og slitasje mm. Mange egenskaper ved friksjon vil ikke fremkomme av denne kurven. En vanlig måte å modellere stibek effekten er ved:

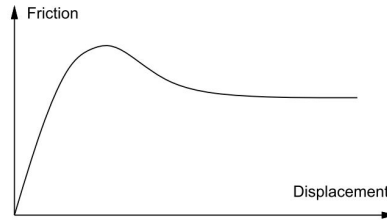
$$F(v) = F_c + (F_s - F_c)e^{-\left|\frac{v}{v_s}\right|^\alpha} + f(v) \quad (2.3.1)$$

Hvor  $v$  er hastigheten og  $v_s$  er stibek hastigheten.  $\alpha$  er en parameter som beskriver hurtigheten kurven avtar, vanlige valg her er  $\alpha = 0.5-1$  og  $2$  [11]. Det Viskøse bidraget er representert ved  $f(v)$ , vanligvis modelleres denne som  $f(v) = F_v v$ .

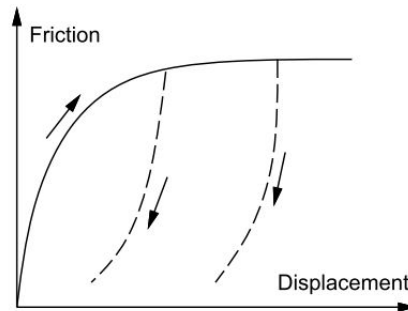
Stribeck modellerte denne friksjon som:

$$F_f = \begin{cases} F(v) & , v \neq 0 \\ F_e & , v = 0 \text{ and } |F_e| < F_s \\ F_s \text{sgn}(F_e) & , \text{ellers} \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Hvor  $F(v)$  er funksjonen for stibek kurven (2.3.1).



Figur 2.4.1: Sammenhengen mellom Friksjonskraften og forflytning som ble funnet ved eksperimenter av Rabinowicz [18]. (Figuren er hentet fra [16])



Figur 2.4.2: Pre-sliding forskyvning funnet i [7]. Senkes tilført kraft vil dette forårsake en permanent forskyvning som vist med de stiplede linjene. (Figuren er hentet fra [16])

## 2.4 Statisk friksjon og sticktionskraften

Statisk friksjon er den friksjonen som holder legemet igjen fra å starte bevegelsen. Den kraften som trengs for å overkomme denne friksjonen kalles sticktionskraften. Rabinowicz [16, 18] studerte denne kraften som en funksjon av forflytning og konstaterte at sticktionskraften er gitt ved kurven vist i figur 2.4.1. Kurven viser at maksimal friksjon oppstår ved en svært liten forflytning fra startposisjonen.

En annen undersøkelse utført av Canudas og Lischinsky [7, 16] er oppførselen i sticktionsfasen. De studerte den fjærlignende bevegelsen før forflytningen starter. Resultatet er vist i figur 2.4.2. Som vi ser av figuren vil man ved å senke tilført kraft forårsake en permanent forskyvning. Denne lille forskyvningen kaldes ofte for pre-sliding bevegelse.

Et av problemene ved å beskrive denne egenskapen ved friksjon er å detektere denne pre-sliding bevegelsen når hastigheten er null. Karnopp [12, 16] presenterte en modell der han definerer en dødsone eller et intervall der hastigheten settes til å være null. Karnopp brukte dette for å oppnå effektiv simulering i friksjonssystemer. I denne dødsonen kan friksjonen beskrives som:

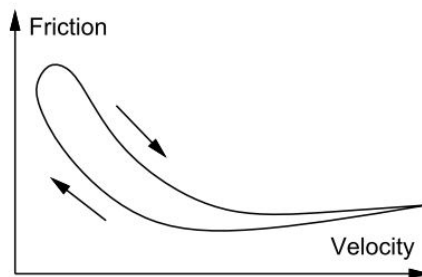
$$F_f = \begin{cases} F_e & , |F_e| < F_c \\ F_c \operatorname{sgn}(F_e) & , \text{ellers} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Men det bør bemerkes at dette ikke er slik ekte friksjon oppfører seg og kun en forenklet tilnærming.

## 2.5 Forsinkelse og Hysteresese oppførsel

At dynamikken ikke er viktig bare i stictionsfasen ble vist av Hess og Soom [10, 16]. De utførte eksperimenter med et periodisk tidsvariant hastighetssignal med en bias hastighet slik at bevegelsen kan gå i begge retninger. Resultatet av dette vises i figur 2.5.1.

Som vi kan se av figuren vil friksjonskraften være større ved økende hastighet i forhold til avtagende hastighet. Dette viser at friksjon har en hystereselignende oppførsel avhengig av hastighetens retning. Dette og pre-sliding bevegelsen gir opphavet for nødvendigheten av å beskrive friksjon med en dynamisk modell [16].



Figur 2.5.1: Forholdet mellom hastighet og friksjon får en hystereselignende oppførsel. Legg merke til at friksjonen er lavere for avtagende hastighet i forhold til økende. (Figuren er hentet fra [16]).

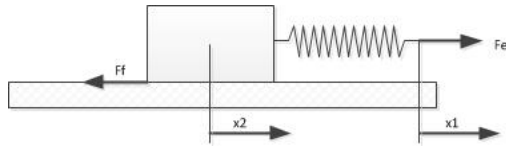
## 2.6 Stick-slip og oscilatorisk oppførsel

Det er det faktum at friksjonen er høyere når et objekt står stille enn når det har veldig lav hastighet som er opphavet til stick-slip oppførselen [1, 18]. Resultatet av denne stickingen og slipingen er at vi får en veldig ujevn rykkete bevegelse. Denne bevegelsen kan føre til at vi får vibrasjoner og støy i systemet som gjør at det er vanskelig å kontrollere.

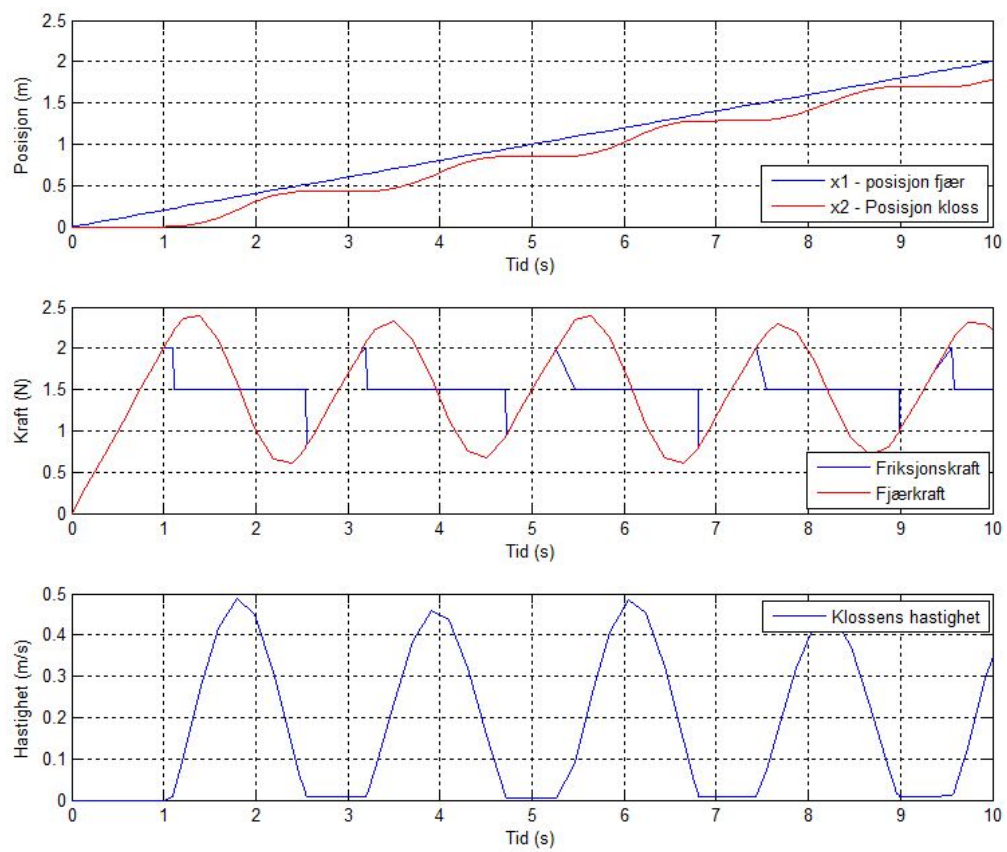
$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= k(x_1 - x_2) - F_f \\ \frac{dx_1}{dt} &= F_e \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Dette kan lettest beskrives ved et lite eksperiment inspirert fra [11, 17]. Se oppsettet i figur 2.6.1 og likningene (2.6.1). Her er  $F_e$  den tilførte kraften,  $F_f$  er friksjonen og  $k$  er fjærstivheten.

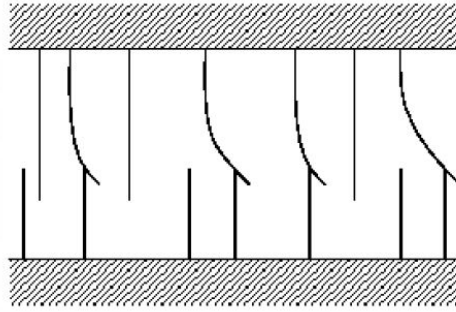
Vi trekker en kloss med massen  $m$  etter en fjær bortover en fast flate. Forflytningen  $x_1$  vil strekke fjæren inntil fjærkraften er større enn sticktionskraften og klossen begynner da å bevege seg. Dette fører igjen til at klossens posisjon  $x_2$  begrenser strekket i fjæra, som igjen fører til at trekraften på klossen avtar og hastigheten minker. Når hastigheten blir lav nok vil klossen stoppe opp og vi er tilbake til sticktionsfasen.



Figur 2.6.1: Oppsett for lite stick-slip eksperiment.



Figur 2.6.2: Plott av lite stick-slip eksperiment.



Figur 2.7.1: Haessing og Friedland så på kontakten mellom to flater som elastiske børstehår. Figuren er hentet fra [20].

Resultatene av simulering for systemet vist i figur 2.6.1 er plottet i figur 2.6.2. Man ser tydelig i disse plottene at vi får en rykkete bevegelse og at systemet får en oscillatorisk oppførsel. Se vedlegg G.1 for simulinkmodell og matlabkoden til eksperimentet.

## 2.7 Dynamiske friksjonsmodellering

Det har i senere tid blitt viet større fokus til dynamiske friksjonsmodeller [16]. Mye av drivkraften bak dette har vært høyere krav til presisjon i servosystemer. Det vil senere bli sett på de dynamiske modellene som er brukt under simulering. Men først litt om opphavet til dynamikken beskrevet med noen “enklere” modeller:

Grunnet mikroskopiske ujevnheter, vil det oppstå en mengde tilfeldig spredte kontaktpunkter mellom to flater som ligger inntil hverandre. Haessing og Friedland [5,16] forsøkte å beskrive oppførselen til disse kontaktpunktene: Hvert av punktene kan sees på som børstehår som beveger seg relativt til hverandre se figur 2.7.1. Dette fører til bøyning av hårene som gir en elastisk oppførsel. Det er denne elastisiteten som er opphavet til friksjonen. Man kan se på disse som små fjær som strekkes til de ryker og umiddelbart danner nye tilfeldige punkt. Modellen er kalt “The Bristle model” og kan beskrives med:

$$F_f = \sum_{i=1}^N \sigma_0 (x_i - b_i) \quad (2.7.1)$$

Hvor  $N$  er antallet punkter,  $\sigma_0$  er stivheten til punktet denne kan også gjøres hastighetsavhengig,  $x_i$  er den relative posisjonen til punktet og  $b_i$  er posisjonen hvor kontaktpunktet ble dannet.

Som man kan se ut fra modellen vil kompleksiteten øke med antall kontaktpunkter man bruker. Dette gjør at denne modellen ikke er godt egnet til simulering men den gir en god forståelse for dynamikken som oppstår i friksjon. En annen svakhet er at den også kan få oscillatorisk oppførsel da den ikke inneholder noe dempeledd.

Haessing og Friedland så i samme artikkel [5,16] også på hvordan modellen kunne gjøres kalkulasjonsmessig gjennomførbart ved og i stede for å bryte

forbindelsene så holdes strekket konstant i bristepunktet. Dette ble gjort ved å innføre en ekstra tilstand  $z$  for dette strekket. Det er også innført et dempeledd ved  $\sigma_1 \frac{dz}{dt}$  som kun gjør seg gjeldene i sticktionsfasen. Modellen er kalt “The reset integrator model” og kan beskrives med:

$$\frac{dz}{dt} = \begin{cases} 0, & \text{hvis } (v > 0 \text{ og } z \geq z_0) \\ 0, & \text{hvis } (v < 0 \text{ og } z \leq -z_0) \\ v, & \text{ellers} \end{cases} \quad (2.7.2)$$

Friksjonskraften er gitt ved:

$$F_f = (1 - a(z))\sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} \quad (2.7.3)$$

Hvor stiction er beskrevet som:

$$a(z) = \begin{cases} a, & \text{hvis } |z| < z_0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \quad (2.7.4)$$

Hvor  $v$  er relativ hastighet mellom objektene som utsettes for friksjon og  $z_0$  beskriver intervallet hvor sticktionen finner sted, dvs. hvis  $|z| < z_0$  er vi i sticktionsfasen.

## Kapittel 3

# Friksjonsmodellene

Det vil nå bli sett på tre dynamiske modeller for friksjon, to av disse er modeller det spesielt skulle sees på. Det blir også presentert en ny modell for friksjon utviklet i denne oppgaven.

### 3.1 Dahl's modellen

Dahl's modell ble utviklet for å kunne simulere systemer med friksjon [6] og det er dette som regnes som begynnelsen for modellering av friksjon i servosystemer [11]. Utgangspunktet var eksperimenter på friksjon i kulelager, og en observasjon her var at kulelager friksjon oppfører seg veldig likt friksjonen til faste legemer.

Dahl tok derfor utgangspunkt i stress-strain kurven fra klassisk mekanikk. Når et objekt utsettes for en belastning vil friksjonskraften gradvis øke inntil legemet løsriver. Dahl har modellert denne kurven ved bruk av en differensiallikning:

$$\frac{dF_f}{dx} = \sigma_0 \left( 1 - \frac{F_f}{\alpha_0} \operatorname{sgn} \left( \frac{dx}{dt} \right) \right)^\beta \quad (3.1.1)$$

Hvor  $\sigma_0$  er koeffisienten for stivheten til kontaktpunktene,  $\alpha_0$  er coulombfriksjonen  $F_c$  og  $\beta$  er en parameter som beskriver formen på stress-strain kurven. Det er vanlig og velge denne lik 1. Som vi ser beskriver denne modellen kraftendringen i forhold til posisjon. Ved hjelp av kunnskap om posisjonen i forhold til tid og kjerneregelen kan denne skrives om til.

$$\frac{dF_f}{dt} = \frac{dF_f}{dx} \frac{dx}{dt} = \sigma_0 \left( 1 - \frac{F_f}{\alpha_0} \operatorname{sgn} \left( \frac{dx}{dt} \right) \right)^\beta \frac{dx}{dt} \quad (3.1.2)$$

Ved å innføre  $F_f = \sigma_0 z$  og  $\beta = 1$  kan vi skrive Dahl's modell på følgende måte.

$$\dot{z} = \dot{x} - \frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{\alpha_0} z \quad (3.1.3)$$

$$F_f = \sigma_0 z \quad (3.1.4)$$

Dette er en generalisering av Coulomb friksjonen og man får ikke med stiction eller Stribeck effekten. Modellen er siden utvidet til det vi kaller LuGre modellen som vil bli beskrevet i avsnitt 3.2.

Likningen (3.1.3) beskriver dynamikken til den interne tilstanden  $z$  som kan sees på som den gjennomsnittlige avbøyningen til kontaktpunktene. Man kan her se på “steady-state” egenskapen til modellen:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= 0 \\ \Rightarrow F_{ss} &= \alpha_0 \operatorname{sgn}(\dot{x})\end{aligned}\quad (3.1.5)$$

Vi ser av (3.1.5) at parameteren  $\alpha_0$  beskriver statisk egenskap ved modellen og av (3.1.4) at parameteren  $\sigma_0$  beskriver dynamikken. Modellen er mye brukt for å simulere systemer med friksjon, spesielt i posisjoneringssystemer med høye krav til presisjon [11].

For å se på hva som skjer under stictionsfasen ser vi på en masse  $m$  i kontakt med en fast flate. La  $x$  være posisjonen til massen. Bevegelses likningen blir da:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -F_f = -\sigma_0 z \quad (3.1.6)$$

Hvor  $z$  er gitt ved (3.1.3). Lineariserer denne rundt  $z = 0$  og  $\dot{x} = 0$  og får:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} \quad (3.1.7)$$

Dette fører til at  $z = x$  i stictionsfasen, noe som også er en rimelig antagelse for pre-sliding bevegelsen. Dette fører til:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \sigma_0 x = 0 \quad (3.1.8)$$

Som er på en kjent form og beskriver fri udempet bevegelse. Se [9]. Denne har en løsning på formen:

$$x(t) = C_1 \cos(\sqrt{\frac{\sigma_0}{m}} t) + C_2 \sin(\sqrt{\frac{\sigma_0}{m}} t) \quad (3.1.9)$$

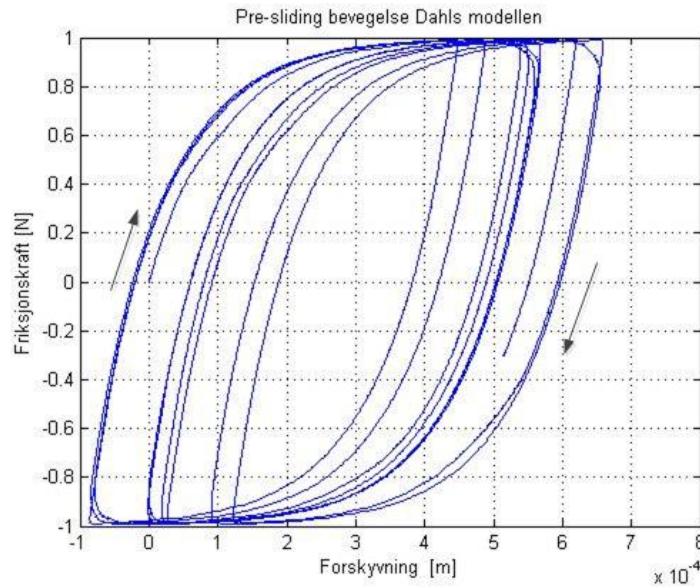
Hvor  $C_1$  og  $C_2$  er konstanter. Dette viser at modellen kan få uønskede oscillere ved små bevegelse innenfor stictionsfasen.

Beskrivelse	Betegnelse	verdi
Mikrostivhet	$\sigma_0$	1e4 N/m
Coulombfriksjon ( $F_c$ )	$\alpha_0$	1 N
Inngangssignal ( $F_e$ )	sinus	0.2 Hz

Tabell 3.1.1: Verdiene brukt til simuleringen av pre-sliding eksperiment

Det er simulert hvordan modellen fungerer i pre-sliding fasen for å se på denne lille forskyvningen Canudas og Lischinsky [7] oppdaget (se avsnitt 2.4 og figur 2.4.2). Dette gjort ved å tilføre friksjon på et enkelt system.





Figur 3.1.1: Pre-sliding forskyvningen for Dahl's Modellen

Simuleringen er gjort under ideelle forhold, uten støy eller oppløsningsbegrensninger. Dette er gjort ved å tilføre en kraft som langsomt varierer periodisk mellom  $\pm 99$  prosent av maksimal løsrivningskraft under sticktion. For Dahl's modellen vil dette være 99 prosent av coulombfriksjonen  $F_c$ . Se tabell 3.1.1 for verdier brukt ved simuleringen. Det er sett på forholdet mellom forskyvning og friksjonskraften. Se vedlegg G.3 for simuleringmodellen og plottet i figur 3.1.1 for resultatet av simuleringen.

Som vi ser av figuren klarer ikke modellen å beskrive pre-sliding fasen i den grad man skulle ønske og får en veldig rykkete bevegelse når hastigheten er så lav. Dette skyldes antagelig modellens mangel på dempeledd og at den ikke tar med stribeckeffecten. Dette vil gjøre at modellen antagelig ikke vil være ideel i systemer hvor man stadig oppholder seg i stictionsovråde.

### 3.2 LuGre modellen

Dahl's modell er siden utviklet videre til LuGre modellen [3, 4, 11]. Modellen tar for seg alle trekk, både statisk og dynamisk ved friksjon. Den beskriver den dynamiske effekten av friksjon som svikt i kontaktpunktene på overflatene. Modellen er gitt ved:

$$\dot{z} = \dot{x} - \sigma_0 \frac{|\dot{x}|}{g(\dot{x})} z \quad (3.2.1)$$

$$F_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + f(\dot{x}) \quad (3.2.2)$$

Modellen beskriver friksjonen ved den dynamiske utviklingen til  $z$  som kan sees på som den gjennomsnittlige avbøyningen av kontaktpunktene til flatene friksjonen virker på.

Sammenligner man med dahl's modell er konstanten  $\alpha_0$  i likning (3.1.3) byttet ut med en hastighetsavhengig funksjon  $g(\dot{x})$  og i likning (3.1.4) er det tilført to tilleggsledd  $\sigma_1 \dot{z}$  og  $f(\dot{x})$ . Tilleggsleddet  $\sigma_1 \dot{z}$  som kan assosieres med dempningen til mikroforskyvningen i kontaktpunktene og  $f(\dot{x})$  som en generell minneløs hastighetsavhengig funksjon. Vanlige valg [4] for  $g(\dot{x})$  og  $f(\dot{x})$  er og beskrive henholdsvis stribeckeffekten og det viskøse bidraget til friksjonen med funksjonene:

$$g(\dot{x}) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-\left(\frac{\dot{x}}{v_0}\right)^2} \quad (3.2.3)$$

$$f(\dot{x}) = \alpha_2 \dot{x} \quad (3.2.4)$$

Her vil  $\alpha_0$  beskrive coulomb friksjonen  $F_c$ ,  $\alpha_1$  beskrive stictionsdifferansen ( $F_s - F_c$ ) og  $\alpha_2$  er det viskøse bidraget  $F_v$ .

Likningen (3.2.1) beskriver dynamikken til den interne tilstanden  $z$  og man kan se på "steady state" egenskapen til modellen ved:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= 0 \\ \Rightarrow \sigma_0 z &= g(\dot{x}) \operatorname{sgn}(\dot{x}) \\ \Rightarrow F_{ss} &= \left( \alpha_0 + \alpha_1 e^{-\left(\frac{\dot{x}}{v_0}\right)^2} \right) \operatorname{sgn}(\dot{x}) + \alpha_2 \dot{x} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Vi ser av (3.2.5) at parameterne  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  og  $v_0$  beskriver de statiske egenskapene og ved å se på (3.2.2) at parameterne  $\sigma_0$  og  $\sigma_1$  beskriver de dynamiske egenskapene [3, 11].

### 3.2.1 Noen modell egenskaper

1: Gjennomsnittlige avbøyningen av  $z$  er endelig [4]:

Anta at  $0 < g(\dot{x}) \leq a$ . Dette fører til at hvis  $|z(0)| \leq a$  da er også  $|z(t)| \leq a \forall t \geq 0$ .

Bevis: La  $V = \frac{z^2}{2}$ , da vil den tidsderiverte av  $V$  langs løsningen til (3.2.1) være:

$$\frac{dV}{dt} = z\dot{z} = z \left( \dot{x} - \sigma_0 \frac{|\dot{x}|}{g(\dot{x})} z \right) = -|\dot{x}| |z| \left( \sigma_0 \frac{|z|}{g(\dot{x})} - \operatorname{sgn}(\dot{x}) \operatorname{sgn}(z) \right) \quad (3.2.6)$$

Vi ser av (3.2.6) at  $\frac{dV}{dt}$  er negativ når  $|z| > g(\dot{x})$  siden  $g(\dot{x})$  er strengt positiv og begrenset av  $a$ . Merk også at  $\sigma_0 \frac{|z|}{g(\dot{x})}$  alltid er positiv og at  $\operatorname{sgn}(\dot{x}) \operatorname{sgn}(z)$  kun kan ha verdiene 1 eller -1. Dette beviser at den gjennomsnittlige avbøyningen  $z$  er endelig og alle løsninger av  $z(t)$  som starter i mengden  $\Omega$  vil forbli i  $\Omega$ . Hvor mengden  $\Omega = \{z : |z| \leq a\}$ .

2: Modellen er dissipative:

Intuitivt forventer man at friksjon forbruker energi, men siden modellen gitt av (3.2.1) og (3.2.2) er dynamisk kan det være faser hvor den lagrer energi og andre hvor den gir tilbake energi. Det kan bevises at mappingen  $\phi : \dot{x} \rightarrow z$  definert ved (3.2.1) er dissipativ med hensyn på funksjonen  $V(t) = \frac{z^2}{2}$ . Se [4, 22].

$$\int_0^t z(\tau) \dot{x}(\tau) d\tau \geq V(t) - V(0) \quad (3.2.7)$$

Bevis: Vi ser fra (3.2.1) at:

$$z\dot{x} = z \frac{dz}{dt} + \frac{|z|}{g(\dot{x})} z^2 \geq z \frac{dz}{dt} \quad (3.2.8)$$

Av dette ser vi at

$$\int_0^t z(\tau) \dot{x}(\tau) d\tau \geq \int_0^t z(\tau) \frac{dz(\tau)}{d\tau} d\tau \geq V(t) - V(0) \quad (3.2.9)$$

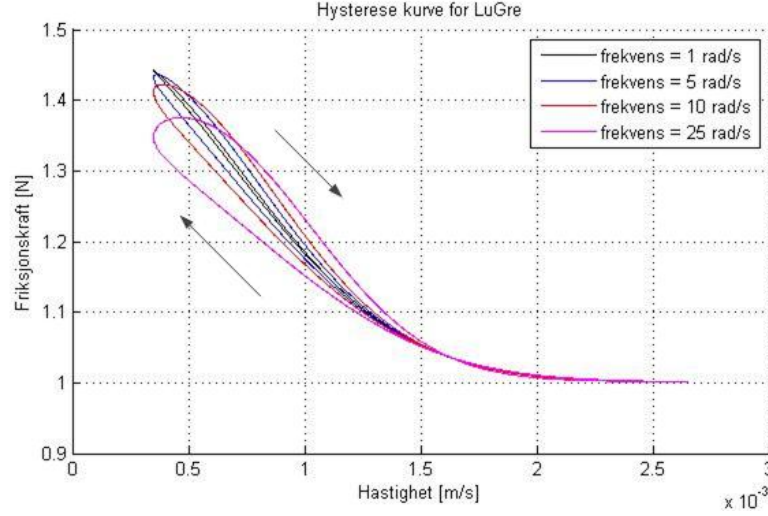
3: Modellen er et dempet andreordenssystem under sticktionsfasen [4]:

For å se hva som skjer i sticktionsfasen av modellen ser vi på en masse  $m$  i kontakt med en fast flate. La  $x$  være posisjonen til massen. Bevegelseslikningen vil da bli:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -F_f = -\sigma_0 z - \sigma_1 \frac{dz}{dt} - \alpha_2 \frac{dx}{dt} \quad (3.2.10)$$

Hvor  $z$  er gitt ved (3.2.1). Lineariserer denne rundt  $z = 0$  og  $\dot{x} = 0$  får:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} \quad (3.2.11)$$



Figur 3.2.1: Hysteresis oppførsel for LuGre modellen. Figuren viser resultat av liknende eksperiment som Hess og Soom beskrev i [10,16]. Hastigheten med høyest frekvens har videst hysteresis sløyfe.

Setter (3.2.11) inn i (3.2.10) og får likningen:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + (\sigma_1 + \alpha_2) \frac{dx}{dt} + \sigma_0 x = 0 \quad (3.2.12)$$

Dette viser oss at systemet oppfører seg som et dempet andreordens system. Legg merke til at bristle stivheten  $\sigma_0$ , vanligvis er veldig stor så det er viktig å ha en  $\sigma_1 \neq 0$  da det viskøse bidraget som regel er for lite for å få god dempning.

4: Modellen får med seg hysteresis oppførselen til friksjon:

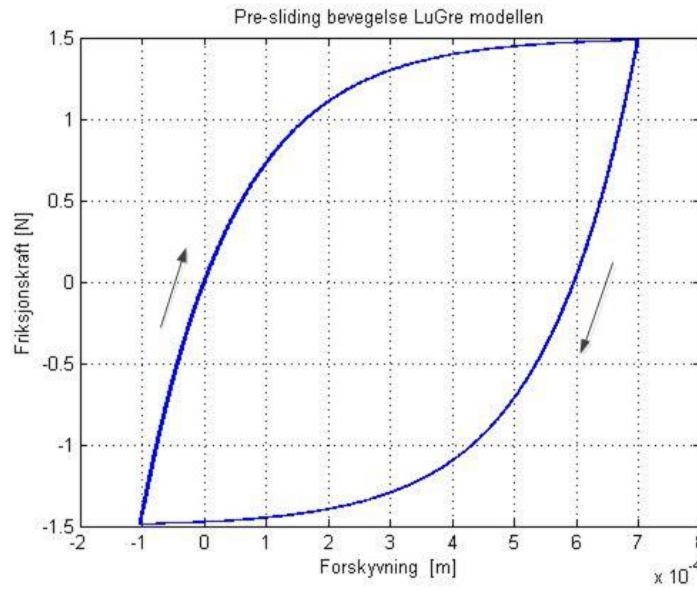
Det har blitt simulert liknende eksperiment som Hess and Soom beskrev i [10,16] som ble nevnt i avsnitt 2.5. Figur 3.2.2 viser resultatene og som vi ser får LuGre modellen med seg denne hysteresis oppførselen. Friksjonen er lavere for avtagende- en forhold økende- hastighet. Se vedlegg G.2 for Matlab kode og Simulink modell.

Sammenligner vi (3.2.12) med en standard andre ordens modell (3.2.13) og bytter ut massen  $m$  med systemets treghetsmoment  $I_s$  kan vi se på dempningen av modellen.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\zeta\omega \frac{dx}{dt} + \omega^2 x \quad (3.2.13)$$

Vi vet at for at systemet ikke skal få oscillatorisk oppførsel men være kritisk dempet må vi velge  $\zeta = 1$  Dette fører til:

$$\zeta = \frac{\sigma_1 + \alpha_2}{2\sqrt{\sigma_0 I_s}} \geq 1 \quad (3.2.14)$$



Figur 3.2.2: Pre-sliding forskyvningen for LuGre Modellen.

Siden det viskøse friksjonsbidraget  $\alpha_2$  som oftest er svært lavt kan vi se bort fra dette og konkludere med at et fornuftig verdi for  $\sigma_1$  er:

$$\sigma_1 \approx 2\sqrt{\sigma_0 I_s} \quad (3.2.15)$$

som stemmer med anbefalinger av Olsson i [17]. Det kan også være vært og merke seg at Dahl's modell ikke innehar dette dempende leddet og vi må derfor kunne forvente at denne kan ha oscillatorisk oppførsel under stickstinsfasen.

Det er også for LuGre modellen simulert hvordan den fungerer i pre-sliding fasen ved å tilføre friksjon på et enkelt system. Simuleringen er gjort under ideele forhold, uten støy eller oppløsningsbegrensninger. Dette er gjort ved å tilføre en kraft som langsomt varierer periodisk mellom  $\pm 99$  prosent av maksimal løsrivningskraft under sticktion. For LuGre modellen vil dette være 99 prosent av sticktionskraften  $F_s$ . Se tabell 3.2.1 for verdier brukt ved simuleringen.

Det er sett på forholdet mellom forskyvning og friksjonskraften. Se vedlegg G.3 for simuleringsmodellen og figur 3.2.2 for resultatet av simuleringen. Som vi ser av figuren ser det ut som modellen klarer å beskrive pre-sliding fasen godt sammenlignet med det som ble beskrevet i avsnitt 2.4 og figur 2.4.2.

Beskrivelse	Betegnelse	verdi
Mikrostivhet	$\sigma_0$	$1e4 \text{ N/m}$
Mikrodempning	$\sigma_1$	$2\sqrt{\sigma_0} \text{ N/ms}^{-1}$
Coulombfriksjon ( $F_c$ )	$\alpha_0$	$1 \text{ N}$
Stiksjonsdifferansen ( $F_s - F_c$ )	$\alpha_1$	$0.5 \text{ N}$
Viskøsfriksjon ( $F_v$ )	$\alpha_2$	$0.5 \text{ N/ms}^{-1}$
Stribeckhastigheten	$v_0$	$0.01 \text{ ms}^{-1}$
Inngangssignal ( $F_e$ )	sinus	$0.2 \text{ Hz}$

Tabell 3.2.1: Verdiene brukt til simuleringen av pre-sliding eksperiment

### 3.3 Kommentar til friksjonsparametrene

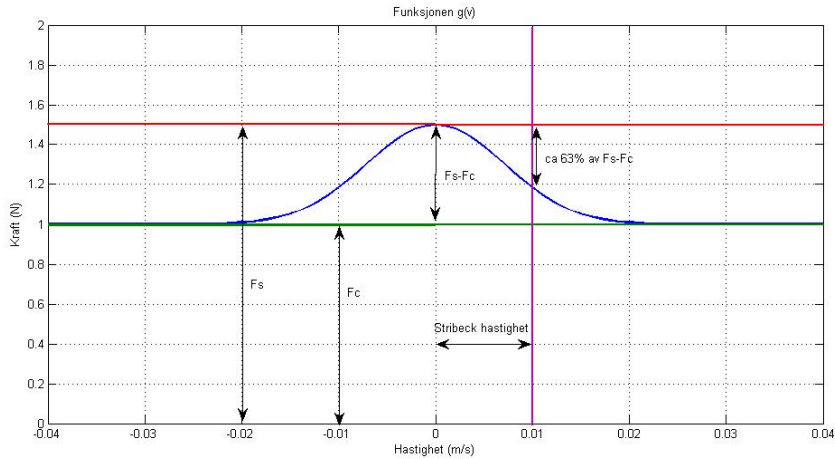
I de modellene som er presentert inngår det en del parametre. Det vil nå bli sett på hvordan disse parametrene påvirker modellen. Plottet i figur 3.3.1 viser funksjonen  $g(\dot{x})$ . Det er denne funksjonen som beskriver stribeck kurven og det er vist i figuren hvordan coulombfriksjonen, sticktionskraften og stribeckhastigheten vil påvirke denne kurven. Her vil parameteren  $\alpha_0 = F_c$ ,  $\alpha_1 = F_s - F_c$  og  $v_0$  beskriver stribeckhastigheten.

Som vi ser av plottet vil denne funksjonen kunn gjøre seg gjeldene innenfor et svært begrenset hastighetsområdet og hurtig stabilisere seg rundt bidraget til coulombfriksjonen.

De dynamiske parametrene  $\sigma_0$  og  $\sigma_1$  er kanskje de parametrene som er vanskeligst å intuitivt se hvordan påvirker systemet. Det vil nå vises hvordan disse påvirker systemet beskrevet ved simuleringer gjort med en LuGre modell. Systemet det sees på er beskrevet ved differensiallikningen (3.3.1) og kan sammenlignes med å skyve en kloss langs en flate:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F_e - F_f \quad (3.3.1)$$

Parametrene for LuGre modellen vises i tabell 3.3.1 så fremt ikke annet er nevnt i forbindelse med simuleringen. Kraften  $F_e$  inn på systemet er en raskt lineært stigende funksjon som starter ved 0 og oppløsningen for hastighetsmålingene er  $10^5 \text{ m/s}$  med samplingtid  $0.1 \text{ ms}$ . Alle andre verdier for systemet er satt til enhetsverdien.



Figur 3.3.1: Simulering stribeck funksjonen for LuGre modellen.

Beskrivelse	Betegnelse	verdi
Mikrosthivhet	$\sigma_0$	$1e4 \text{ N/m}$
Mikrodempning	$\sigma_1$	$2\sqrt{\sigma_0} \text{ N/ms}^{-1}$
Coulombfriksjon ( $F_c$ )	$\alpha_0$	$1 \text{ N}$
Stiksjonsdifferansen ( $F_s - F_c$ )	$\alpha_1$	$1 \text{ N}$
Viskøsfriksjon ( $F_v$ )	$\alpha_2$	$0.5 \text{ N/ms}^{-1}$
Stribeckhastigheten	$v_0$	$0.01 \text{ ms}^{-1}$

Tabell 3.3.1: Friksjonsparametre som brukes i LuGre modellen for å tilføre friksjon i systemet

Det er gjort tre simuleringer for å forsøke å vise hvordan parametrene  $\sigma_0$  og  $\sigma_1$  påvirker modellen:

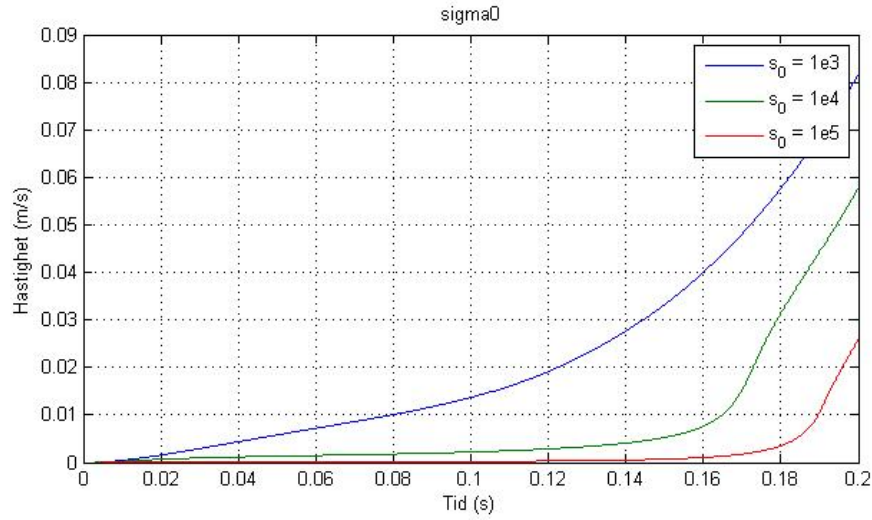
- Simulering for  $\sigma_0$ :

Systemet er simulert med  $\sigma_0$  lik  $10^3$ ,  $10^4$  og  $10^5$ . Det viskøse bidraget  $\alpha_2$  er satt til 0. Plottet i figur 3.3.2 viser resultatet av simuleringen.

Som vi ser vil en høyere verdi av  $\sigma_0$  føre til at systemet bruker lengre tid før det får opp hastigheten. Den vil da stige hurtigere en for en lavere verdi. Dette tolkes som at løsrivelsen skjer hurtigere ved en høy verdi av  $\sigma_0$ . Ser vi på plottet for lav verdi av  $\sigma_0$  kan det knapt kalles en løsrivelse da hastigheten øker kontinuerlig omtrent fra 0.

- Simulering for  $\sigma_1$ :

Systemet er simulert med tre forskjellige verdier for  $\sigma_1$  som tilsvarer udempet, overdempet og et kritisk dempet. Det viskøse bidraget  $\alpha_2$  er satt til 0. Plottet i figur 3.3.3 viser resultatet av simuleringen. Her ser vi at et udempet system vil få et kraftig oversving idet løsrivelsen skjer og vi vil trolig få en rykkete bevegelse.



Figur 3.3.2: Simulering av LuGre modellen med forskjellige verdier for  $\sigma_0$ .

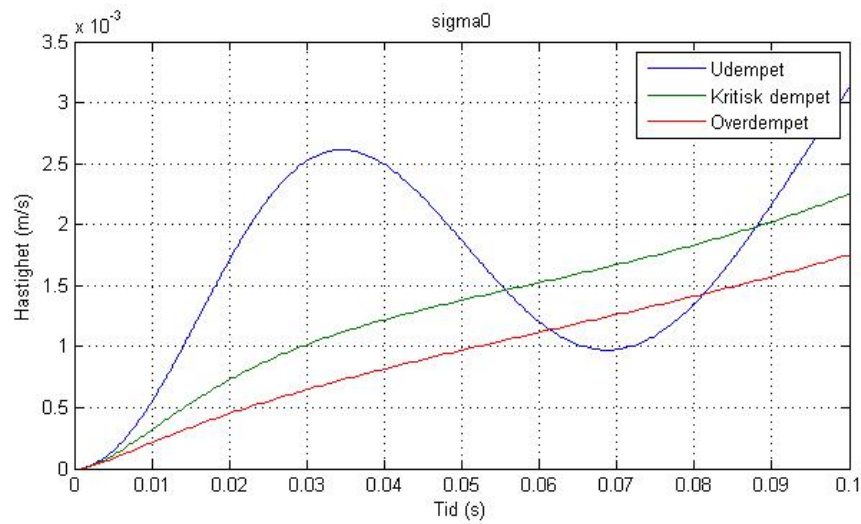
Beskrivelse	Verdier
Oppløsning for posisjonsmålinger	$10^{-7}$ m
Oppløsningen for hastighetsmålinger	$10^{-4}$ m/s
Samplingfrekvensen	min 10KHz
Typiske verdier for $\sigma_0$	$10^3$ til $10^5$
Typiske verdier for $\sigma_1$	$\sigma_1 = 2\sqrt{\sigma_0 I_s}$
Stribeckhastigheten	$v_0 \approx 0.01$ m/s

Tabell 3.3.2: Anbefalinger Olsson gir i [17].  $I_s$  er den totale tregheten til systemet.

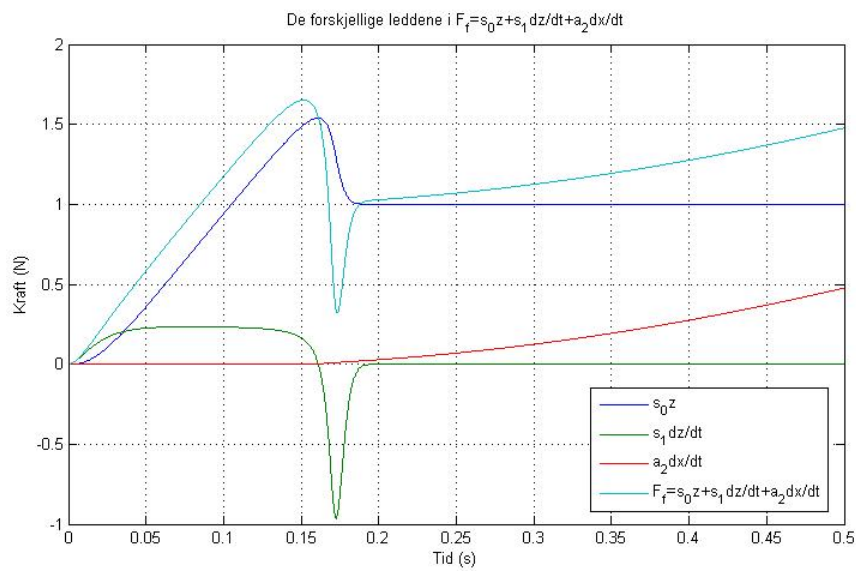
- Simulering av totalfriksjonen  $F_f$ :

Funksjonen  $F_f$  i likning (3.2.2) er delt opp i de tre forskjellige leddene  $\sigma_0 z$ ,  $\sigma_1 \dot{z}$  og  $\alpha_2 \dot{x}$ . Plottet i figur 3.3.4 viser resultatet av simuleringen. Som vi ser av figuren er det bidragene knyttet til  $\sigma_0$  og  $\sigma_1$  som gjør seg sterkest gjeldene i det tidlige stadiet av bevegelsen og etter hvert vil stabilisere seg som et resultat av bidraget fra coulomb og viskøs friksjon.





Figur 3.3.3: Simulering av LuGre modellen med forskjellige verdier for  $\sigma_1$ .



Figur 3.3.4: Simulering av bidragene til funksjonen  $F_f$  for LuGre modellen

Ser man på simuleringene som er gjort ovenfor ser man at flere av disse har svært små endringer og noen av disse skjer relativt hurtig når de endrer seg. Dette gjør at det stilles strenge krav til målinger med hensyn på oppløsning og samplingstider. Olsson [17] gir anbefalinger for krav til målingene og typiske verdier for noen av parametrene. I tabell 3.3.2 vises disse kravene og verdiene.

Vi ser umiddelbart at samplingsfrekvensen som brukes i RWS er for lav (1KHz) i forhold til det Olsson anbefaler. Da vi ikke har noen kjenskap til fysiske størrelser ved systemet er det vanskelig å gi en eksakt verdi for oppløsningen i meter. Det antas at oppløsningen ikke oppfyller kravene i tabell 3.3.2 da dette vil kreve en radius for målingen til lastposisjonen på:

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{4096}r &\leq 10^{-7}\text{m} \\ \Rightarrow r &\leq 65 \times 10^{-6}\text{m}\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

Hvor  $r$  er radiusen ved punktet målingen er gjort. Dette må man anta er en usannsyelig lav radius for måleposisjonen.

Det konkluderes derfor med at forutsetningen for å få et perfekt friksjonses-  
timat ikke er tilstede og kanskje spesielt for LuGre modellen som tar med alle disse relativt små endringene i stictionsfasen.

### 3.4 Extended Dahl's modellen

I mange industrielle applikasjoner er det ofte vanlig og ha lavere samplingsfrekvens en 10KHz, dårligere oppløsning en  $10^{-7}$  m på posisjonsmålinger eller hastighets målinger med lavere oppløsning en  $10^{-4}$  m/s som anbefales av Ols-son [17]. Det er også vanlig at man kun måler posisjoner og dermed ikke har tilgjengelig hastighetsmålinger men bruker estimater for disse.

I systemer hvor man ikke har høy nok samplingsfrekvens, eller tilgang til gode målinger med høy oppløsning på hastighets eller posisjons data vil man ha problemer med å detektere stribeckeffekten og sticktionsfasen. Dahl's modell som ikke tar med seg disse egenskapene vil kunne fungere bra i slike systemer men har det problemet at den fort får oscillatorisk oppførsel ved veldig lave hastigheter.

#### 3.4.1 En ny tilpasset Dahl's modell

Det vil her bli presentert en ny modell for friksjon tilpasset systemer med lav samplingsrate og liten tilgang til gode måledata for hastigheter. Denne tar utgangspunkt i Dahls modell og egenskaper fra LuGre modellen. Man benytter seg her av at LuGre modellen oppfører seg som et dempet andreordens system ved at man innfører et dempeledd (Se egenskap 3 i avsnitt 3.2.1). Det har også blitt valgt å ta med et hastighetsavhengig friksjonsbidrag i denne modellen.

$$\dot{z} = \dot{x} - \sigma_0 \frac{|\dot{x}|}{\alpha_0} z \quad (3.4.1)$$

$$F_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + f(\dot{x}) \quad (3.4.2)$$

Som man ser av likningene i modellen brukes her (3.1.3) fra Dahl's modell og (3.2.2) fra LuGre modellen. Hvor det hastighetsavhengige bidraget er:

$$f(\dot{x}) = \alpha_2 \dot{x} \quad (3.4.3)$$

Man kan også her se på steady-state egenskapene:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= 0 \\ \Rightarrow \sigma_0 z &= \alpha_0 \operatorname{sgn}(\dot{x}) \\ \Rightarrow F_{ss} &= \alpha_0 \operatorname{sgn}(\dot{x}) + \alpha_2 \dot{x} \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

I likhet med Dahl's og LuGre modellen ser vi av likning (3.4.4) og (3.4.2) at  $\alpha_0$  og  $\alpha_2$  er de statiske parameterne og  $\sigma_0$  og  $\sigma_1$  er de dynamiske.

Fordeler med denne modellen i forhold til LuGre er at den har færre parametere som fører til at den vil være kalkulasjonsmessig enklere. Siden man har problemer med og detektere stribeck effekten og sticktionskraften, kan man isteden bruke den generalisert coulombfriksjon.

Dette vil medføre at modellen vil kunne ha tilnærmet like gode friksjonsestimater som LuGre modellen i systemer som nevnt ovenfor. Dette underbygges ved resultatene av simulering i avsnitt 3.4.3.

### 3.4.2 Noen modell egenskaper

I likhet med LuGre modellen kan det også her vises noen modellegenskaper.

- 1: Gjennomsnittlige avbøyningen av  $z$  er endelig:

Anta at  $0 < F_c \leq a$ . Dette fører til at hvis  $|z(0)| \leq a$  da er også  $|z(t)| \leq a \forall t \geq 0$  [4].

Bevis: La  $V = \frac{z^2}{2}$ , da vil den tidsderivate av  $V$  langs løsningen til (3.4.1) være:

$$\frac{dV}{dt} = z\dot{z} = z \left( \dot{x} - \sigma_0 \frac{|\dot{x}|}{F_c} z \right) = -|\dot{x}| |z| \left( \sigma_0 \frac{|z|}{F_c} - \text{sgn}(\dot{x}) \text{sgn}(z) \right) \quad (3.4.5)$$

Vi ser av (3.4.5) at  $\frac{dV}{dt}$  er negativ når  $|z| > F_c$  siden  $F_c$  er en positiv konstant og begrenset av  $a$ . Merk også at  $\sigma_0 \frac{|z|}{F_c}$  alltid er positiv og at  $\text{sgn}(\dot{x}) \text{sgn}(z)$  kun kan ha verdiene 1 eller -1. Dette beviser at den gjennomsnittlige avbøyningen  $z$  er endelig og alle løsninger av  $z(t)$  som starter i mengden  $\Omega$  vil forbli i  $\Omega$ . Hvor mengden  $\Omega = \{z : |z| \leq a\}$ .

- 2: Modellen er dissipative:

Som nevnt for LuGre forventes at friksjon forbruker energi. Det kan bevises at mappingen  $\phi : \dot{x} \rightarrow z$  definert ved (3.4.1) er dissipative med hensyn på funksjonen  $V(t) = \frac{z^2}{2}$ . Se [4, 22].

$$\int_0^t z(\tau) \dot{x}(\tau) d\tau \geq V(t) - V(0) \quad (3.4.6)$$

Bevis: Vi ser fra (3.4.1) at:

$$z\dot{x} = z \frac{dz}{dt} + \frac{|z|}{F_c} z^2 \geq z \frac{dz}{dt} \quad (3.4.7)$$

Av dette ser vi at

$$\int_0^t z(\tau) \dot{x}(\tau) d\tau \geq \int_0^t z(\tau) \frac{dz(\tau)}{d\tau} d\tau \geq V(t) - V(0) \quad (3.4.8)$$

- 3: Modellen er et dempet andreordenssystem under sticktionsfasen: Dette utledes likt som i LuGre modellen se egenskap 3 i avsnitt 3.2.1, likning (3.2.10), (3.2.11) og (3.2.12).

I likhet med som for LuGre modellen vil vi her også finne at en fornuftig verdi av  $\sigma_1$  bør være:

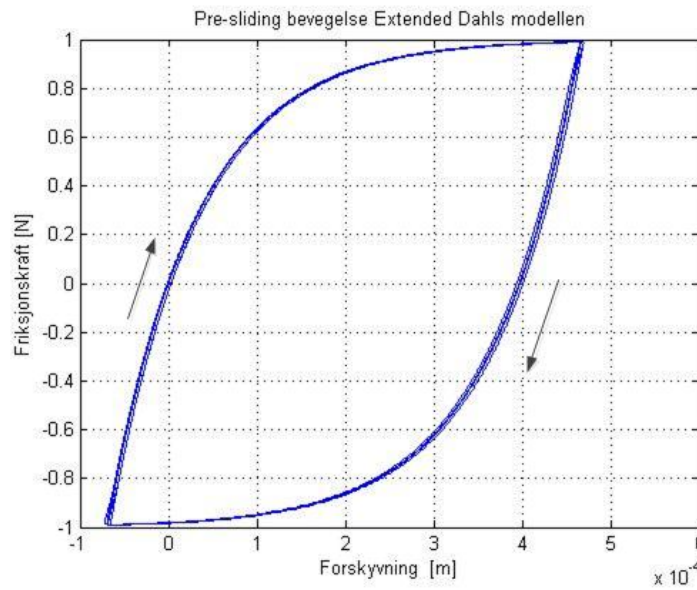
$$\sigma_1 \approx 2\sqrt{\sigma_0 I_s} \quad (3.4.9)$$

for at vi skal opprettholde kritisk dempningen av modellen. (Se likning (3.2.12), (3.2.13) og (3.2.14) for utledning.)

Det er også her simulert hvordan modellen kompensere i pre-sliding fasen. Simuleringen er gjort under ideelle forhold, uten støy eller oppløsningsbegrensninger.

Beskrivelse	Betegnelse	verdi
Mikrostivhet	$\sigma_0$	$1e4 \text{ N/m}$
Mikrodempning	$\sigma_1$	$2\sqrt{\sigma_0} \text{ N/ms}^{-1}$
Coulombfriksjon ( $F_c$ )	$\alpha_0$	$1 \text{ N}$
Viskøsfriksjon ( $F_v$ )	$\alpha_2$	$0.5 \text{ N/ms}^{-1}$
Inngangssignal ( $F_e$ )	sinus	$0.2 \text{ Hz}$

Tabell 3.4.1: Verdiene brukt til simuleringen av pre-sliding eksperiment



Figur 3.4.1: Pre-sliding forskyvningen for Extended Dahl's Modellen

Dette er gjort ved å tilføre en kraft som varierer periodisk mellom  $\pm 99$  prosent av maksimal kraft under sticktion. For Extended Dahl's modellen vil dette være 99 prosent av Coulombfriksjonen  $F_c$ . Se tabell 3.2.1 for verdier brukt ved simuleringen. Se figur 3.4.1 for resultatet av simuleringen.

Som vi ser av figuren ser det ut som om modellen kompenserer bra i pre-sliding fasen og selv uten å ta med stiction og stibeck egenskapene tåler resultatet sammenligning med LuGre modellen.

### 3.4.3 Sammenlikning av modellene

Det har blitt gjort simuleringer på systemet hvor det er tilført friksjon med en LuGre modell. Det er her kompensert for friksjon med de samme parameterne i kompensasjonsmodellene som er brukt ved å tilføre friksjon. Disse vises i tabell 3.4.2. (Se avsnitt 5.1 for detaljer vedrørende kompensasjonsmodellen).

Systemet er tilført både prosess og målestøy, det har blitt brukt et random signal som hastighetsreferanse for å få en helt tilfeldig bevegelse av lasten. Systemet er simulert ved både 1KHz og 10KHz samplingsfrekvens og sammenlignet med et system uten friksjon og støy. Det er brukt samme

Beskrivelse	Betegnelse	verdi
Mikrostivhet	$\sigma_0$	$1e4 \text{ N/m}$
Mikrodempning	$\sigma_1$	$2\sqrt{\sigma_0} \text{ N/ms}^{-1}$
Coulombfriksjon ( $F_c$ )	$\alpha_0$	$1 \text{ N}$
Stiksjonsdifferansen ( $F_s - F_c$ )	$\alpha_1$	$0.5 \text{ N}$
Viskøsfriksjon ( $F_v$ )	$\alpha_2$	$0.5 \text{ N/ms}^{-1}$
Stribeckhastigheten	$v_0$	$0.01 \text{ ms}^{-1}$

Tabell 3.4.2: Verdiene brukt ved både tilføring og kompensasjon i sammenligningene.

	DL	LG	EDL	Samplingfrekvens
Middelverdi	0.0135	9.1248e-3	9.1796e-3	1KHz
Middelverdi	0.0136	2.0917e-5	-1.7027e-5	10KHz
Standardavvik	0.0270	0.0175	0.0174	1KHz
Standardavvik	0.0269	7.4365e-4	7.9167e-4	10KHz

Tabell 3.4.3: Middelverdier og standardavvik til feilen, se også figur 3.4.2 og 3.4.3.

referansesignal for simuleringene ved 1KHz og 10KHz og et kalmanfilter for å estimere lasthastighet. Det er her blitt sett på feilen for last posisjonen.

Resultatene vises i figur 3.4.2 og 3.4.3 samt opplysninger om middelverdier og standardavvik til feilen i tabell 3.4.3 og RMS verdien til feilen i tabell 3.4.4. Som vi ser av figurene og tabellene vil vi ved 1KHz ha tilnærmet like egenskaper for både LuGre og Extended Dahl's modellene, det bør også bemerkes at Extended Dahl's modellen klarer seg ganske bra også ved 10KHz. Dette vises godt ved at RMS til feilen er i størrelsesorden  $\leq 10e-6$  som er tilsvarende for LuGre modellen.

Formel for utregning av RMS verdien til feilen:

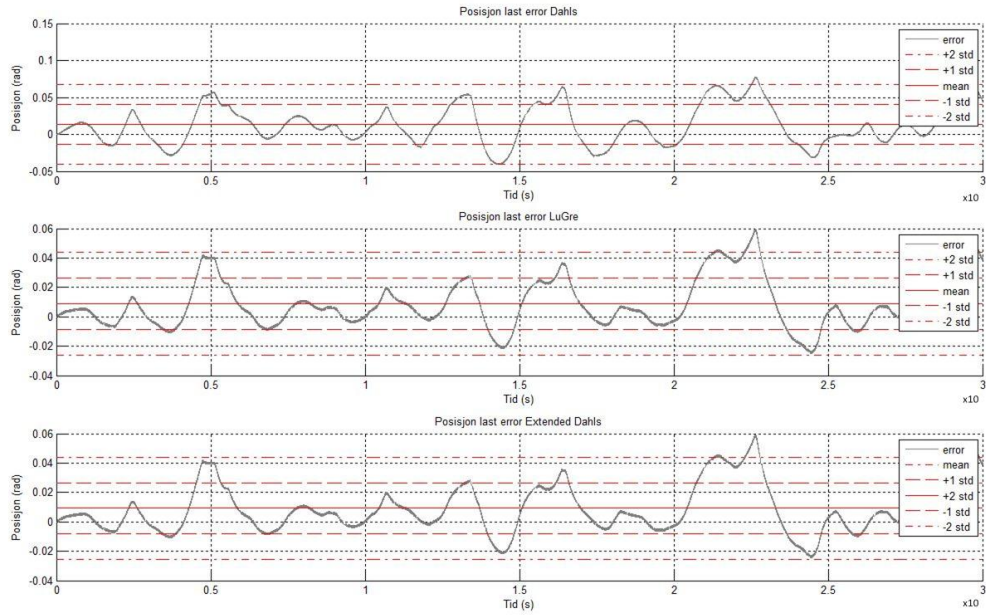
$$RMS \text{ Error} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - r_i)^2} \quad (3.4.10)$$

hvor  $y_i$  kompensert utgangsverdi og  $r_i$  er den riktige verdien uten friksjon.

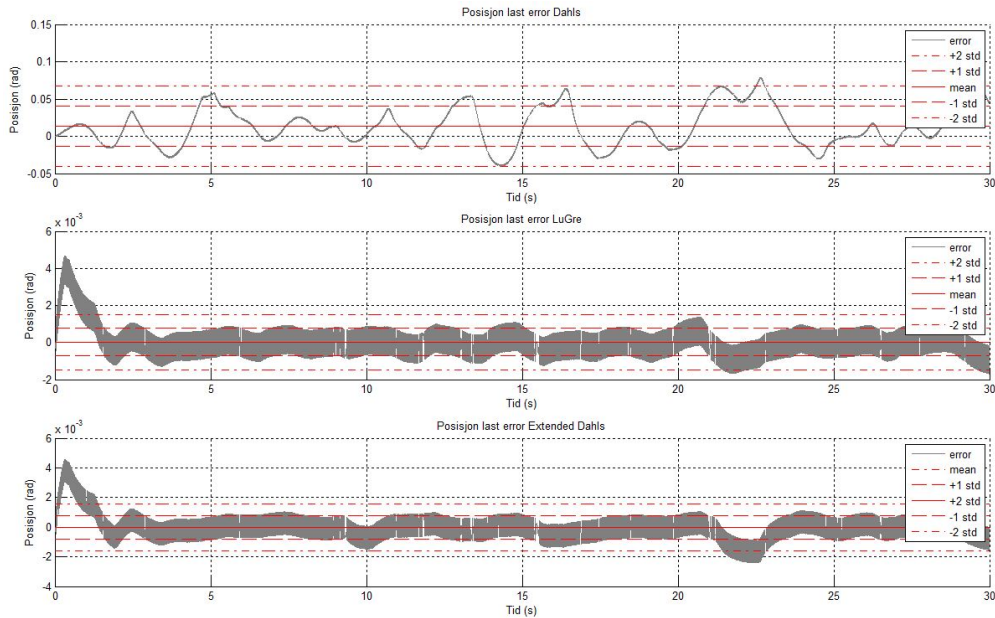
Det er gjort tilsvarende simulering for systemet med referansesignal fra KPS måledata. Her er det sett på lastposisjonen for systemet ved 1KHz og 10KHz. Modellen er ellers som for tidligere simulering.

	DL	LG	EDL	Samplingfrekvens
RMS Error	1.7430e-4	1.1403e-4	1.1351e-4	1KHz
RMS Error	5.5023e-5	1.3582e-6	1.4457e-6	10KHz

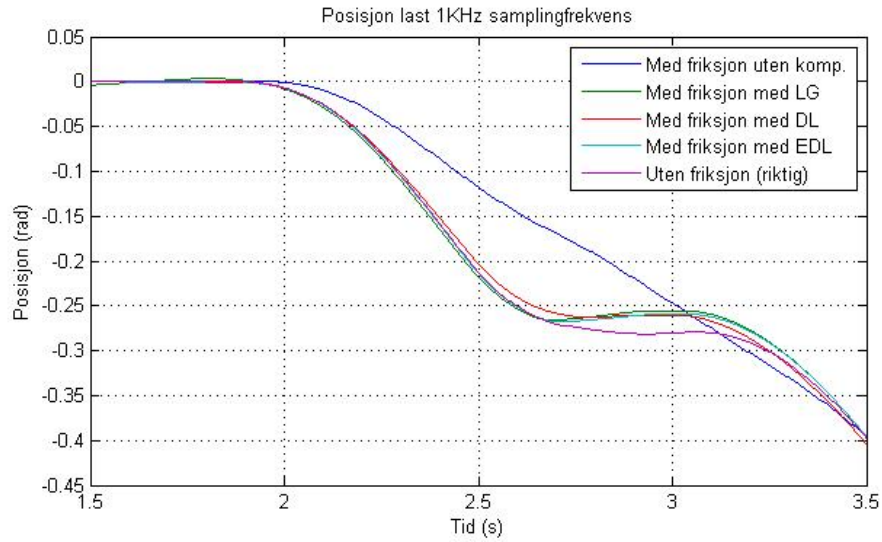
Tabell 3.4.4: RMS verdiene til feilen ved 1KHz og 10KHz samplingsfrekvens. Se likning 3.4.10 for utregning



Figur 3.4.2: Samplingsfrekvens 1KHz. Her ser man at Extended dahl's gir tilnærmet like resultater som LuGre (NB! y-aksen er forskjellig på plottene). Se tabell 3.4.3 for middelerverdier (mean) og standardavvik (std).



Figur 3.4.3: Samplingsfrekvens 10KHz. Her ser man at LuGre og Extended Dahl's modellene gir en klar forbedring av feilen. Vi ser også at Dahl's modellen som ikke tar med stiction og stribeck effekten ikke har nevneverdig forbedring ved høyere samplingsfrekvens. (NB! y-aksen er forskjellig på plottene). Se tabell 3.4.3 for middelerverdier (mean) og standardavvik (std).

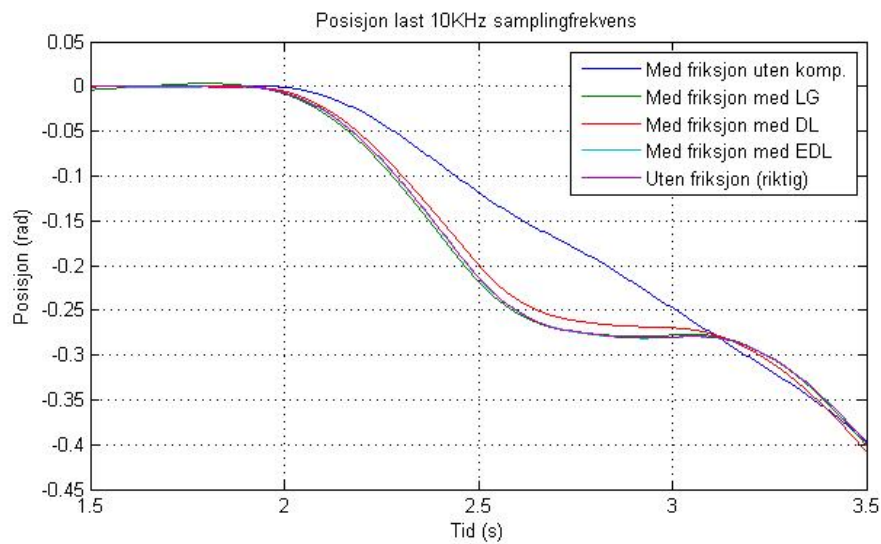


Figur 3.4.4: Samplingsfrekvens 1KHz. Her ser man at Extended dahl's gir tilnærmet like resultater som LuGre. Men vi vil ikke klare å kompensere friksjonen helt ved så lav samplingsfrekvens.

Vi ser her at vi har en klar forbedring av lastposisjonen ved 10KHz sammenlignet med 1KHz. Se plottene i figur 3.4.4 og 3.4.5 for resultatene av simuleringen.

Dette og resultatene av simuleringen vist ved feilen underbygger antagelsen om at vi ikke vil klare å få perfekte friksjonsestimater ved 1KHz samplingsfrekvens og at Extended Dahl's modellen vil gi oss tilstrekkelig gode resultater sammenlignet med LuGre modellen.





Figur 3.4.5: Samplingsfrekvens 10KHz. Her ser man at LuGre og Extended Dahl's modellene gir en klar forbedring. Vi ser også at Dahl's modellen som ikke tar med sticktion og stribeck effekten ikke gir nevneverdig forbedring ved høyere samplingsfrekvens.



## Kapittel 4

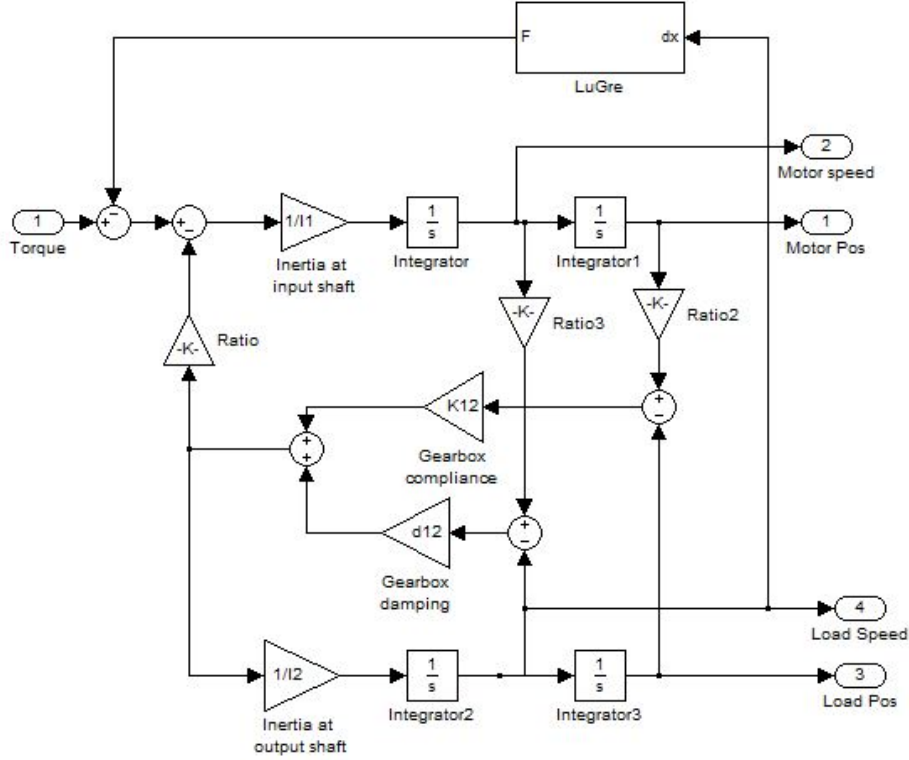
# Estimering av friksjonsparametre

Ser man på modellene som er presentert i avsnittene 3.1, 3.2 og 3.4 er man avhengig av å finne de forskjellige statiske og dynamiske parameterne som inngår. Det er publisert mange metoder for dette som f.eks. neuralnettverk anbefalt i [21], “Genetic algorithms” [14], “Interval Analysis and Set Inversion” [15] for å nevne noen.

En fellesnevner her er at det er at det gjøres empiriske forsøk med god kjennskap til hastigheter, posisjoner og krefter. De fleste metodene deler friksjonen opp i to faser: Steady state og pre-sliding og man gjør egne eksperimenter på hver av disse for å finne henholdsvis statiske og dynamiske parametre.

For systemet det sees på i denne oppgaven har man kun tilgang til posisjonsmålinger og kjennskap til pådraget. Friksjonsmodellene det har blitt sett på er avhengig av hastighetsdata og dynamikken i modellene beskrives ved den ikke målbare ulineære tilstanden  $z$ . Det har heller ikke vært mulig å gjøre empiriske eksperimenter med god nok kontroll på inn og ut data.

Dette har ført til at det har blitt valgt å bruke et extended kalmanfilter for å estimere parametre og den ukjente tilstandene i modellene. Denne parameterestimeringen er valgt å gjøres off-line da konvergens av parametrene er følsom for initielle verdier av parametre og kovarians, og ofte må retunes siden vi har lite eller ingen a priori informasjon om parametrene og støyen, og eneste metode er ved å prøve og feile [2].



Figur 4.1.1: Simulink modellen av RWS med friksjon tilført med en LuGre modell. På inngangen tilføres pådragsmomentet og det er tilgjengelig målinger for last- og motorposisjon. Modellen er levert av KPS med unntak av den tilførte friksjonen

## 4.1 Extended kalmanfilter

Da både Kalmanfilter (KF) og Extended Kalmanfilteret (EKF) er godt dokumentert i litteraturen, vil det ikke bli sett på alle detaljer vedrørende dette. Leser henvises til litteratur som [8] og [19].

Modellene som brukes kan generelt beskrives med systemlikningene:

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{w}, t) = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} + \underline{w} \\
 \underline{y} &= \underline{h}(\underline{x}, \underline{v}, t) = \underline{C}\underline{x} + \underline{v} \\
 \underline{w} &\sim \mathcal{N}(0, Q) \\
 \underline{v} &\sim \mathcal{N}(0, R)
 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Modellen tar utgangspunkt i at nyttekraften inn på systemet  $F_n$  består av differansen mellom påført kraft  $F_e$  og friksjonen i systemet  $F_f$  se likning (4.1.2). Tilført friksjon er beregnet på grunnlag av lasthastigheten og trekkes fra pådraget. Se figur 4.1.1 for modellen med tilført friksjon.

$$F_n = F_e - F_f(\dot{\Theta}_l) \tag{4.1.2}$$

På grunnlag av figur 4.1.1 og likning (4.1.2) ser vi at nyttekraften  $F_n$

inn på systemet kan beskrives med  $F_n = \dot{\Theta}_m I_m$ . Ved bruk av dette og tilstandsvektoren:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \Theta_m & \dot{\Theta}_m & \Theta_l & \dot{\Theta}_l & z \end{bmatrix}^T \quad (4.1.3)$$

Setter vi opp følgende generelle likninger for systemet:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K_{12}}{N^2 I_m} x_1 - \frac{d_{12}}{N^2 I_m} x_2 + \frac{K_{12}}{N I_m} x_3 + \frac{d_{12}}{N I_m} x_4 - \frac{F_f(\underline{x}, \underline{p}, t)}{I_m} + \frac{u}{I_m} + \frac{w}{I_m} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{K_{12}}{N I_l} x_1 + \frac{d_{12}}{N I_l} x_2 - \frac{K_{12}}{I_l} x_3 - \frac{d_{12}}{I_l} x_4 \\ \dot{x}_5 &= F_m(\underline{x}, \underline{p}, t) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Hvor  $F_f(\underline{x}, \underline{p})$  er friksjonen i systemet,  $F_m(\underline{x}, \underline{p})$  friksjonsmodellen,  $\underline{p}$  er en vektor med friksjonsparametere,  $u$  er kraften inn på systemet og  $w$  er prosesstøyen som her er tenkt tilført sammen med pådraget. Disse funksjonene og parametervektoren vil variere ut fra hvilken friksjonsmodell vi ser på. Se vedlegg A, B og C for systemet med de forskjellige friksjonsmodellene og tilhørende systemmatriser.

#### 4.1.1 Utledning av det diskrete extended kalmanfilteret

Utledningen er hentet fra [19]. Annta at vi har systemet:

$$\begin{aligned} x_k &= f_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) \\ y_k &= h_k(x_k, v_k) \\ w_k &\sim \mathcal{N}(0, Q_k) \\ v_k &\sim \mathcal{N}(0, R_k) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Vi Taylorrekke utvikler denne rundt  $x_{k-1} = \hat{x}_{k-1}^+$  og setter  $w_{k-1} = 0$  og får følgende:

$$\begin{aligned} x_k &= f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0) + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} \Big|_{\hat{x}_{k-1}^+} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+) + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial w} \Big|_{\hat{x}_{k-1}^+} w_{k-1} \\ &= f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0) + F_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+) + L_{k-1} w_{k-1} \\ &= F_{k-1} x_{k-1} + [f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0) - F_{k-1} \hat{x}_{k-1}^+] + L_{k-1} w_{k-1} \\ &= F_{k-1} x_{k-1} + \tilde{u}_{k-1} + \tilde{w}_{k-1} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Dette fører til at det kjente signalet  $\tilde{u}_k$  og støyen  $\tilde{w}_k$  er definert som følgende:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k &= f_k(\hat{x}_k^+, u_k, 0) - F_k \hat{x}_k^+ \\ \tilde{w}_k &\sim \mathcal{N}(0, L_k Q_k L_k^T) \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Vi lineariserer målelikningen rundt  $x_k = \hat{x}_k^-$  og setter  $v_k = 0$  for å få:

$$\begin{aligned}
 y_k &= h_k(\hat{x}_k^-, 0) + \frac{\partial h_k}{\partial x} \bigg|_{\hat{x}_k^-} (x_k - \hat{x}_k^-) + \frac{\partial h_k}{\partial v} \bigg|_{\hat{x}_k^-} v_k \\
 &= h_k(\hat{x}_k^-, 0) + H_k(x_k - \hat{x}_k^-) + M_k v_k \\
 &= H_k x_k + [h_k(\hat{x}_k^-, 0) - H_k \hat{x}_k^-] + M_k v_k \\
 &= H_k x_k + z_k + \tilde{v}_k
 \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Dette fører til at det kjente signalet  $z_k$  og støyen  $\tilde{v}_k$  er definert som følgende:

$$\begin{aligned}
 z_k &= h_k(\hat{x}_k^-, u_k, 0) - H_k \hat{x}_k^- \\
 \tilde{v}_k &= \sim \mathcal{N}(0, M_k R_k M_k^T)
 \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Vi har nå et lineært tilstandsrom system i likning (4.1.6) og en lineær målelikning i (4.1.8). Dette betyr at vi kan benytte oss av et standard diskret kalmanfilter. Dette resulterer i følgende likninger for det diskrete EKF for systemet beskrevet i (4.1.1).

$$\begin{aligned}
 P_k^- &= A_{k-1} P_{k-1}^+ A_{k-1}^T + L_{k-1} Q_{k-1} L_{k-1}^T \\
 K_k &= P_k^- C_k^T (C_k P_k^- H_k^T + M_k R_k M_k^T)^{-1} \\
 \hat{x}_k^- &= f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+, 0) \\
 \hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + K_k (y_k - h_k(\hat{x}_k^-, 0)) \\
 P_k^+ &= (I - K_k H_k) P_k^-
 \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

## 4.2 Utvidelse av systemet

Da EKF her skal brukes til parameterestimering er det nødvendig å utvide systemet til å inneholde de ukjente parameterne som skal estimeres. Dette resulterer i følgende tilstandsvektor for det nye systemet:

$$\underline{x}_{aug} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{p} \end{bmatrix} \tag{4.2.1}$$

Hvor  $\underline{x}$  er den tidligere tilstandsvektoren og  $\underline{p}$  er en  $i \times 1$  parametervektor. Dette fører til at  $\underline{x}_{aug}$  er en  $n \times 1$  vektor hvor  $n = i + 5$ . Dette gir oss følgende generelle utvidede matriser for systemet.

$$A_{aug} = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2.2}$$

$$B_{aug} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.2.3}$$

$$C_{aug} = \begin{pmatrix} C & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

Hvor  $A_{aug}$  er en  $n \times n$  matrise,  $B_{aug}$  er en  $n \times 1$  matrise og  $C_{aug}$  er en  $2 \times n$  matrise hvor  $A$ ,  $B$  og  $C$  er de tidligere modellmatrisene til systemet.

Hvis parametrene som skal estimeres er konstanter kan det være nødvendig å tilføre en liten støy  $w_p$  til tilstandene som skal estimeres. Dette for å drive estimatene hvis systemet ikke klarer dette selv [19]. Dette har det vist seg at ikke har vært nødvendig for vårt system.

Ideen er nå å linearisere det ulineære systemet rundt gjeldene tilstandsestimat. Dette gjøres ved å finne de partiell deriverte matrisene  $A_{lin}$ ,  $C_{lin}$ ,  $L$  og  $M$  innsatt tidligere tilstandsestimat. Disse er igjen estimert av det lineariserte systemet så vi får en form for rekursiv metode. Det er dette som er den opprinnelige ideen bak det utvidede kalmanfilteret se [19].

$$A_{lin} = \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}_{aug}} \right|_{\hat{x}} \quad (4.2.5)$$

$$C_{lin} = \left. \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}_{aug}} \right|_{\hat{x}} \quad (4.2.6)$$

$$L = \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial w} \right|_{\hat{x}} \quad (4.2.7)$$

$$M = \left. \frac{\partial \underline{h}}{\partial v} \right|_{\hat{x}} \quad (4.2.8)$$

Se vedlegg A, B og C for resultater av de lineariserte matrisene.

### 4.3 Kommentar til de partiellderiverte

Da alle friksjonsmodellene som er simulert innehar et ledd som inneholder  $|x_4|$  er det gjort en tilnærming for å finne den deriverte av denne.

Det er kjent fra de fleste calculus bøker (som f.eks. [13]) at:

$$\sqrt{(x_4)^2} = |x_4| \quad (4.3.1)$$

Ved bruk av tilnærming (4.3.1) fører dette til at:

$$\frac{\partial |x_4|}{\partial x_4} = \frac{\partial \sqrt{(x_4)^2}}{\partial x_4} = \dot{x}_4 \frac{x_4}{\sqrt{(x_4)^2}} = \dot{x}_4 \operatorname{sgn}(x_4) \quad (4.3.2)$$

siden vi her ser på en bevegelse langs en akse.

#### 4.4 Algoritmen for parameterestimering

1. System- og måle- likninger er gitt ved følgende:

$$\begin{aligned}\underline{\dot{x}} &= \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{w}, t) = A\underline{x} + B\underline{u} + \underline{w} \\ \underline{y} &= \underline{h}(\underline{x}, \underline{v}, t) = C\underline{x} + \underline{v} \\ \underline{w} &\sim \mathcal{N}(0, Q) \\ \underline{v} &\sim \mathcal{N}(0, R)\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

2. Initialisering av variabler, matriser og initial verdier for systemet.

3. Lineariser  $A_{lin} = \left. \frac{\partial f}{\partial \underline{x}_{aug}} \right|_{\hat{\underline{x}}_k}$  og finn  $L = \left. \frac{\partial f}{\partial \underline{w}} \right|_{\hat{\underline{x}}_k}$ . Diskretiser disse.

4. Kalkuler tidsoppdateringen  $\hat{\underline{x}}_k^-$  og  $P_k^-$ .

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}_k^- &= f_{k-1}(\hat{\underline{x}}_{k-1}^+, 0) \\ P_k^- &= A_{k-1}P_{k-1}^+A_{k-1}^T + L_{k-1}Q_{k-1}L_{k-1}^T\end{aligned}\tag{4.4.2}$$

5. Lineariser  $C_{lin} = \left. \frac{\partial h}{\partial \underline{x}_{aug}} \right|_{\hat{\underline{x}}}$  og finn  $M = \left. \frac{\partial h}{\partial \underline{w}} \right|_{\hat{\underline{x}}}$ . Diskretiser disse.

6. Kalkuler måleoppdateringen  $K_{k+1}$ ,  $\hat{\underline{x}}_{k+1}^+$  og  $P_{k+1}^+$ .

$$\begin{aligned}K_k &= P_k^- C_k^T (C_k P_k^- H_k^T + R)^{-1} \\ \hat{\underline{x}}_k^+ &= \hat{\underline{x}}_k^- + K_k (y_k - h_k(\hat{\underline{x}}_k^-, 0)) \\ P_k^+ &= (I - K_k H_k) P_k^-\end{aligned}\tag{4.4.3}$$

7. Fortsett på steg 3 inntil ferdig.

8. Finn de estimerte parametrene ved å middle verdien av de siste  $10^4$  estimatene for hver parameter.

##### **En liten kommentar:**

Det er ved innledende tester forsøkt å øke tidsoppdateringen med 10 ganger for å høyne frekvensen til hastighetsestimatene. Dette har ikke gitt den ønskede forbedringen og det ser ut som om dette i stede forringer dynamikken til systemet. Det er derfor valgt ikke å gå videre med dette og vil derfor ikke bli tatt med som en del av løsningen.



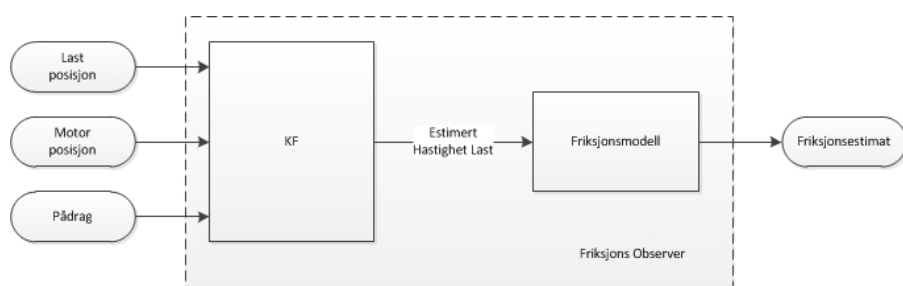
## Kapittel 5

# Kompensasjonsmodellene

Det vil i dette kapittelet bli sett på to løsninger laget for å kompensere for friksjonen i systemet. Den ene av disse er laget spesielt med tanke på implementering i en mikrokontroller.

### 5.1 Kompensasjonsmodellen for simulering

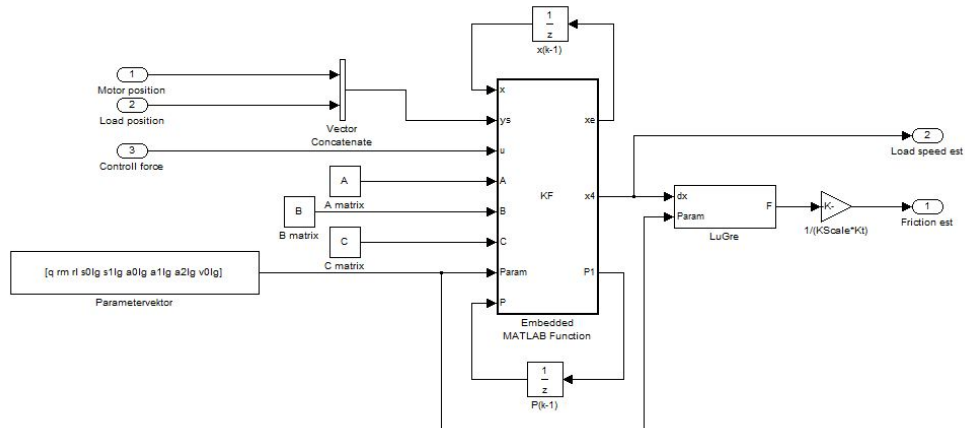
Det har blitt valgt å lage en form for observer for å kompensere friksjon i systemet. Denne består primært av to deler, et kalmanfilter og friksjonsmodell. Kalmanfilteret vil her kun estimere lasthastigheten ut fra pådrag og posisjonsmålinger se figur 5.1.1.



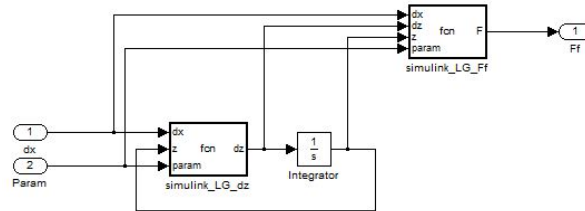
Figur 5.1.1: Generelt blokkskjema for simuleringsmodellen.

I figur 5.1.2 vises kompensasjonsmodellen brukt til simulering laget i simulink for LuGre modellen. Som man ser brukes det et Kalmanfilter for å estimere lasthastigheten som igjen er grunnlaget for friksjonsestimatet. Gain blokken ( $1/(KScale \cdot K_t)$ ) er en nivå tilpassning da modellen er satt opp på bakgrunn av nyttkraften på motorakslingen mens friksjonskompensasjonen legges til pådraget ut av regulatoren som varierer mellom  $\pm 100$  prosent. Se figur 5.1.4 for blokkskjema med friksjons kompensatoren.

Modellblokken, se figur 5.1.3, består igjenn av to deler. En for differensial likningen som beskriver utviklingen av  $z$  og en for utregningen av friksjonen

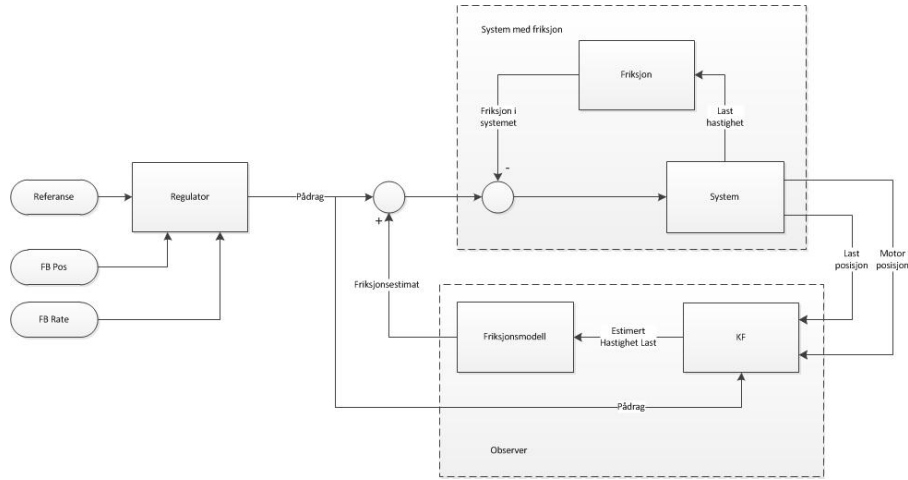


Figur 5.1.2: Simuleringsmodellen laget i simulink. Her vises den for LuGre modellen.



Figur 5.1.3: Friksjonsmodell-blokken for LuGre modellen laget i simulink.

$F_f$ . Disse vil i denne være på bakgrunn av LuGre likningne (3.2.1) og (3.2.2) i avsnitt 3.2. Både Dahl's og Extended Dahl's vil ha tilsvarende oppbygning som for LuGre modellen. Se vedlegg D for simulink modellene, matlabkoden til de forskjellige blokkene og Kalmanfilter matrisene. Det er også denne friksjonsblokken som er brukt for å tilføre systemet friksjon under simulering.



Figur 5.1.4: Blokkskjema for system tilført friksjon og friksjonskompensasjon

## 5.2 Kompensasjonsmodellen for Implementering

Det har også blitt laget en egen modell beregnet til implementering, denne er dannet på grunnlag av kompensasjonsmodellen laget for simulering. Dette er gjort ved å utvide kalmanfilteret brukt i simuleringsmodellen til også å inneholde en tilstanden  $z$ . Se figur 5.2.1 for blokkskjema av systemet med implementeringsmodellen. Dette fører til at friksjonsestimatet kan kalkuleres på bakgrunn av denne tilstanden, se (5.2.1), (5.2.2) og (5.2.3) for likningene til de forskjellige modellene.

Dahl's modellen:

$$F_f = \sigma_0 x_5 \quad (5.2.1)$$

LuGre modellen:

$$F_f = \sigma_0 x_5 + \sigma_1 \left( x_4 - \sigma_0 \frac{|x_4|}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-\left(\frac{x_4}{v_0}\right)^2}} x_5 \right) + \alpha_2 x_4 \quad (5.2.2)$$

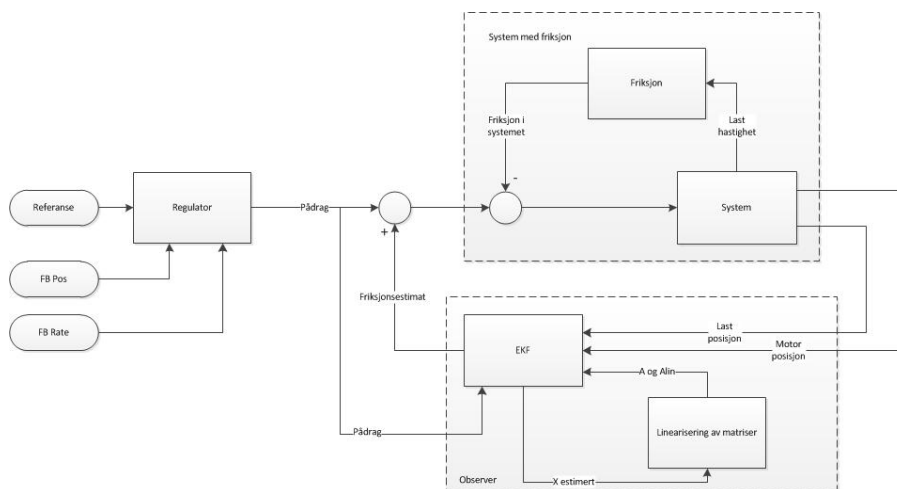
Extended Dahl's modellen:

$$F_f = \sigma_0 x_5 + \sigma_1 \left( x_4 - \sigma_0 \frac{|x_4|}{\alpha_0} x_5 \right) + \alpha_2 x_4 \quad (5.2.3)$$

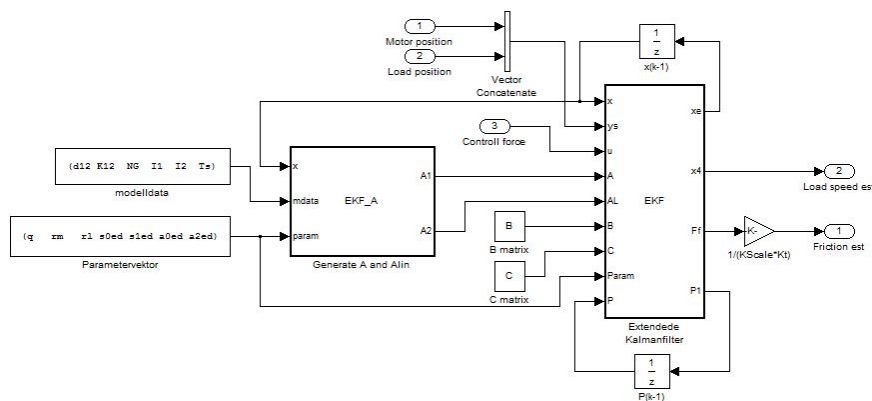
Hvor tilstandsvektoren er gitt ved:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \Theta_m & \dot{\Theta}_m & \Theta_l & \dot{\Theta}_l & z \end{bmatrix}^T \quad (5.2.4)$$

Vi vil ved dette få en ulinear systemmodell så det er valgt å bruke et extended kalmanfilter. Dette resulterer i at modellen også her blir bestående av to hovedblokker, en for kalmanfilteret og en for å finne den lineariserte matrisen rundt gjeldende tilstandsestimat. Se figur 5.2.2 for simulinkmodellen. Her vises



Figur 5.2.1: Blokkskjema for systemet med implementeringsmodellen



Figur 5.2.2: Implementeringsmodellen laget i simulink. Her vises den for Extended Dahl's modellen.

Extended Dahl's modellen, men systemet vil være tilsvarende for Dahl's og LuGre modellene. Se også vedlegg E for simulink, og matlab kode til alle de tre modellene.

Det er i utgangspunktet ikke noe problem å bruke kompensasjonsmodellene vist i avsnitt 5.1 til implementering, men ved konvertering til f.eks. C/C++ vil man her trenge en rutine for å løse differensiallikningen (ODE) i friksjonsmodellen. Ved å bruke implementeringsmodellen som presenteres her vil vi få denne inn i tilstandsromsmodellen og man kan med dette unngå behovet for en slik rutine. Det er dette og et ønske fra KPS om ikke å ha med en ODE rutine som er bakgrunnen for at denne er laget.

## Kapittel 6

# Resultater

Det vil nå bli sett på simuleringsresultater av kompensasjonen for de forskjellige modellene med bruk av estimerte parametre.

Systemet er simulert med både genererte data og målinger tatt opp hos KPS. Målingene som er brukt er hentet fra en encoder på motorsiden og et potmeter på last siden. Systemet er også tilført både måle og prosessstøy ved generering av egne data. I tabell 6.0.1 vises de systemparametrene som er brukt ved generering, estimering og simulering av systemet. Dette er parametre som er levert av KPS.

### 6.1 Generering av data

Det har blitt generert simuleringsdata på grunnlag av modell levert av KPS (se vedlegg H). Dette systemet har blitt tilpasset med hensyn til oppløsninger på målinger og antagelser om støy.

Motor posisjonen hentes fra en enkoder som gir 5656 pulser pr omdreining. Last målingene er hentet fra et potmeter som dekodes med de 12 øverste bittene i en AD konverter.

Da det ikke er gitt opplysninger om målestøyen hverken på last- eller motor-aksling er denne tilført som uniform hvitstøy med maksimum amplitude  $\pm 1.5$  ganger bitoppløsningen slik at de minst signifikante bittene kan toggle tilfeldig. Det er heller ikke gitt noen opplysning om prosessstøyen som også er tilført som

Beskrivelse	Betegnelse	verdi
Tregghetsmomentet på motoraksling	$I_m$	$0.0047 \text{ Kgm}^2$
Tregghetsmomentet på lastaksling	$I_l$	$26.0 \text{ Kgm}^2$
Gear utveksling	$N$	80:1
Gear stivhet	$K_{12}$	$1.8\text{e}5 \text{ Nm}$
Gear dempning	$d_{12}$	$1.5032\text{e}3 \text{ Nms}^{-1}$
Skaleringsfaktor for pådrag	$K_{Scale}$	0.4
Motor momentkonstanten	$K_t$	$0.178 \text{ NA}^{-1}$

Tabell 6.0.1: De aktuelle systemparametrene levert av KPS.

Beskrivelse	Betegnelse	verdi
Mikrostivhet	$\sigma_0$	$1e4 \text{ N/m}$
Mikrodempning	$\sigma_1$	$25 \text{ N/ms}^{-1}$
Coulombfriksjon ( $F_c$ )	$\alpha_0$	$1 \text{ N}$
Stiksjonsdifferansen ( $F_s - F_c$ )	$\alpha_1$	$0.5 \text{ N}$
Viskøsfriksjon ( $F_v$ )	$\alpha_2$	$0.5 \text{ N/ms}^{-1}$
Stribeckhastigheten	$v_0$	$0.01 \text{ ms}^{-1}$

Tabell 6.1.1: Friksjonsparametre som brukes i LuGre modellen for å tilføre friksjon i systemet

Beskrivelse	verdi
Prosess støy:	$w_p \sim \mathcal{N}(0, 0.005)$
Målestøy motor:	$v_m \sim \mathcal{N}(0, 0.005)$
Målestøy last:	$v_l \sim \mathcal{N}(0, 0.05)$

Tabell 6.2.1: Middelverdi og varians for støyen

uniform hvitstøy med maksimal amplitude  $\pm 0.1 \text{ Nm}$ . Det er forøvrig ingen korelasjon mellom de forskjellige støyene.

Referansesignalet tilføres som hastighetsreferansen til objektet som observeres. Dette er generert ved en lavfrekvent sinusbølge med frekvens på  $0.1 \text{ Hz}$  og amplitude på  $\pi/10 \text{ rad/s}$  som er tilført en begrenset hvitstøy med amplitude  $\pm 0.1 \text{ rad/s}$  og samplingtid på  $0.1 \text{ sekund}$ . Det bør bemerkes at amplituden er hastigheten til objektet som ikke må forveksles med frekvensen til referansesignalet. Observasjonsplattformen står forøvrig stille.

Systemet er tilført friksjon med en LuGre modell, denne er beregnet på grunnlag av lasthastigheten og tilføres sammen med pådraget. Se figur 4.1.1 i kapittel 4. Friksjonsparametrene som er brukt i modellen for å tilføre friksjon er vist i tabell 6.1.1.

## 6.2 Simulering med genererte data

Simulering av systemet med genererte data består i flere trinn, først er parametrene estimert, så er det simulert en sammenligning av modellene med både kompensasjonsmodellen for -simulering og -implementering. Dette har blitt gjort for alle de tre friksjonsmodellene det er blitt sett på.

### 6.2.1 Resultater av parameterestimering

Parameterestimeringen er som nevnt utført med et extended kalmanfilter. Se tabell 6.2.1 og 6.2.2 for data om støyen og initialverdiene for kovariansen. Initialverdier for tilstandene til selve systemet er satt til  $\underline{x}_0 = \underline{0}$  og de initielle verdiene for parametrene  $\underline{p}$  som skal estimeres vises i tabell 6.2.3.

Parameterestimatene er beregnet ved å kjøre en 100 sekunders måleserie med

Beskrivelse	diagonal elementer
Dahl's:	$[[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^*10^6 \ [1 \ 1]^*10^5]$
LuGre:	$[[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^*10^5 \ [1000 \ 100 \ 1000 \ 100 \ 10000 \ 1]]$
Extended Dahl's:	$[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^*10^5$

Tabell 6.2.2: Diagonalelementene for initial kovarians

Beskrivelse	Betegnelse	verdi
Mikrostivhet	$\sigma_0$	$1e4 \ N/m$
Mikrodempning	$\sigma_1$	$20 \ N/ms^{-1}$
Coulombfriksjon ( $F_c$ )	$\alpha_0$	$0.7 \ N$
Stiksjonsdifferansen ( $F_s - F_c$ )	$\alpha_1$	$0.45 \ N$
Viskøsfriksjon ( $F_v$ )	$\alpha_2$	$0.7 \ N/ms^{-1}$
Stribeckhastigheten	$v_0$	$8.5e-3 \ ms^{-1}$

Tabell 6.2.3: Initialverdiene til de ukjente parametrene brukt under parameterestimeringen

en samplingfrekvens på 1KHz. Metoden for å valg av estimerte parametrene er gjort ved å midle verdien av de siste  $10^4$  samplene. I tabell 6.2.4 viser resultatet av parameterestimeringen. Se også plottene i figur 6.2.1, 6.2.2 og 6.2.3 for henholdsvis Dahl's, LuGre og Extended Dahl's modellene.

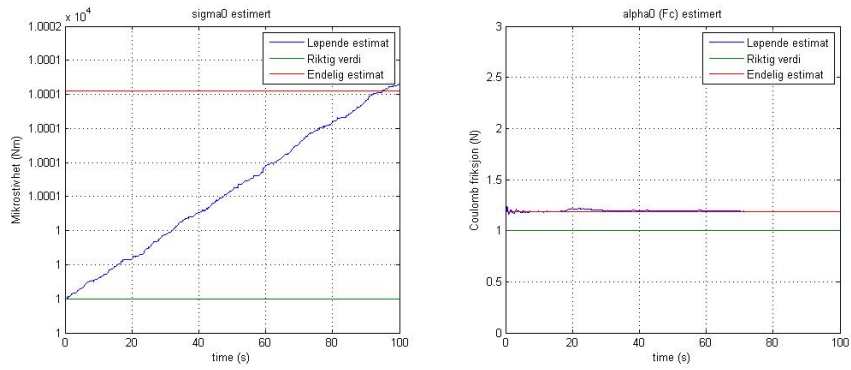
Sammenligner man disse med de riktige parametrene (se tabell 6.1.1) ser man av tabellene og plottene at man treffer rimlig greit på de fleste parametrene, men som forventet har man større problemer med de parametrene som gjør seg spesielt gjeldene under sticktionsfasen.

Det bør spesielt bemerkes problemene alle modellene har med å stabilisere estimatet for  $\sigma_0$ , dette må kunne antas at skyldes for lav oppløsning og samplingfrekvens i forhold til hva Olson anbefaler i [17]. Det er helt klart at LuGre modellen er den modellen som er mest skadelidende av dette da denne inneholder flest parametre knyttet til sticktionsfasen.

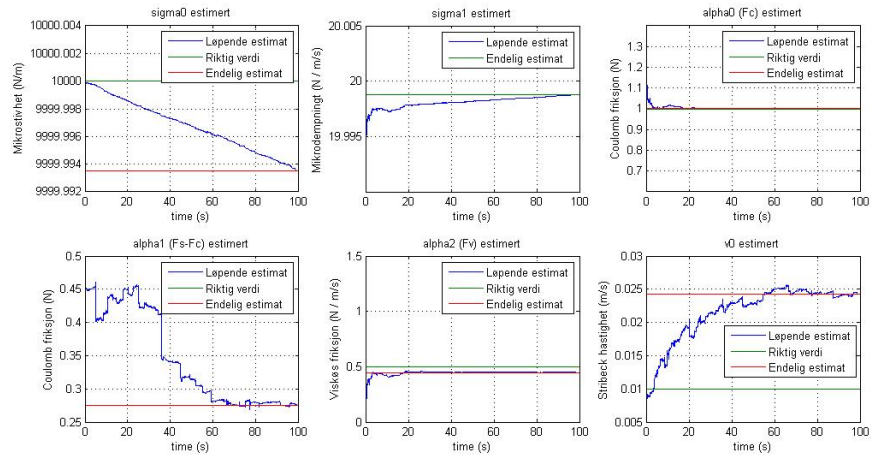
Som vi ser er estimatet av coulombfriksjonen i Dahl's modellen noe høyere en for de andre modellene som man må anta skyldes at denne parametren fanger opp en del av den viskøse friksjonen. Det kan konkluderes med at Dahl's og Extended Dahl's modellene kanskje er de som gir best resultater da de tar for seg lite av parametrene i sticktionsfasen.

Modell	$\sigma_0$	$\sigma_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$v_0$
Dahl's	1.0001e4	-	1.1869	-	-	-
LuGre	1.0000e3	19.9987	0.9996	0.2763	0.4495	0.0242
Extended Dahl's	9.9998e3	26.2846	1.0139	-	0.4276	-

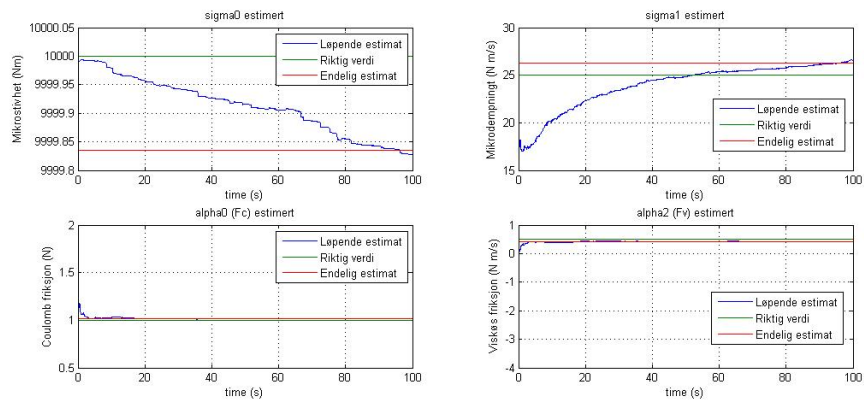
Tabell 6.2.4: Resultater av parameterestimering med genererte data.



Figur 6.2.1: Plott for estimerte parametre Dahl's modell



Figur 6.2.2: Plott for estimerte parametre LuGre modell

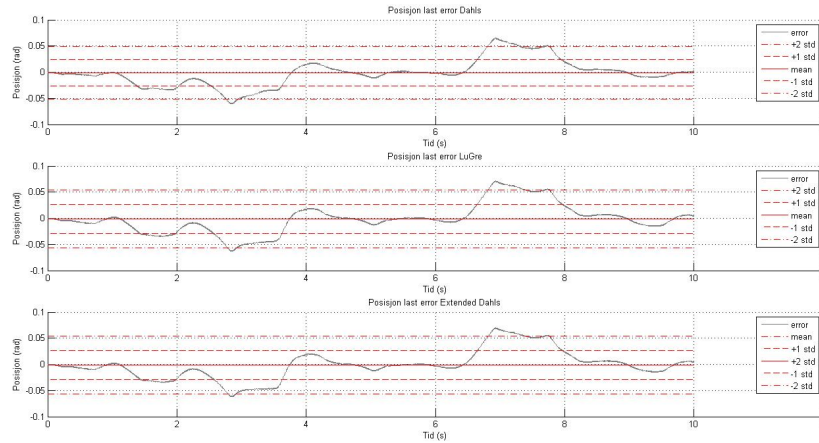


Figur 6.2.3: Plott for estimerte parametre Extended Dahl's modell



	DL	LG	EDL	Samplingfrekvens
Middelverdi	0.0176	0.0194	0.0193	1KHz
Standardavvik	0.0252	0.0277	0.0275	1KHz
RMS Error	0.0253	0.0277	0.0275	1KHz

Tabell 6.2.5: Middelverdier, standardavvik og RMS til feilen simulert ved 1KHz samplingfrekvens, se også figur 6.2.4.



Figur 6.2.4: Samplingsfrekvens 1KHz. Her ser man at Extended dahl's gir tilnærmet like resultater som LuGre (NB! y-aksen er forskjellig i plottene). Se tabell 6.2.5 for middelverdier (mean) og standardavvik (std).

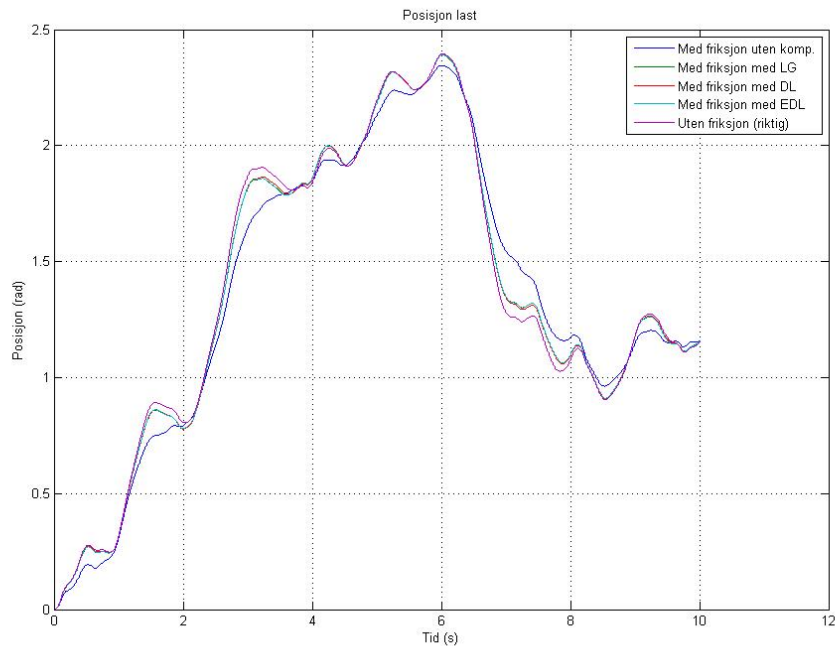
### 6.2.2 Sammenligning av simuleringsmodell 1KHz

Modellene er vidre simulert med de estimerte parametrene og sammenlignes med systemer både med og uten friksjon. Støyen og initialverdien til tilstandsestimatene  $\underline{x}$  er som for parameterestimeringen. Kovariansmatrisen  $P_0$  er her satt til en diagonalmatrise med alle elementene lik  $10^6$ .

Resultatene av simuleringen er vist i tabell 6.2.5 og figur 6.2.4 ved middelverdier, varianser, RMS verdier og plott av feilen. RMS verdien til feilen er beregnet med likningen 3.4.10 i avsnitt 3.4.3.

Som vi ser gir modellene oss nesten like god kompensasjon, men det er Dahl's modellen som her gir oss best resultat. Dette er kanskje noe overaskende i forhold til resultatene som er vist i avsnitt 3.4.3, men dette må kunne anntas skyldes at forutsetningene for parameterestimeringen burde vært bedre for de andre modellene og Dahl's modellen er den som får minst påvirkning av dette. LuGre og Extended Dahl's modellene har derimot tilnærmet like resultater som vist tidligere ved bruk av denne samplingfrekvensen.

Det er også gjort en sammenligning av lastposisjonen for alle modellene og sammenlignet med systemer både med og uten friksjon, resultatene vises i plottet i figur 6.2.5. Man ser som forventet at man har et forbedringspotensiale slik som vist i avsnitt 3.4.3, men at man helt klart forbedrer posisjonsfeilen i systemet.



Figur 6.2.5: Samplingsfrekvens 1KHz. Her ser man at alle modellene gir tilnærmet like resultater. Men vi vil ikke klare å kompensere friksjonen helt ved så lav samplingsfrekvens.

	DL	LG	EDL	Samplingsfrekvens
Middelverdi	0.0186	3.3835e-3	4.0945e-3	10KHz
Standardavvik	0.0267	4.4125e-3	5.4380e-3	10KHz
RMS Error	0.0267	4.4240e-3	5.4454e-3	10KHz

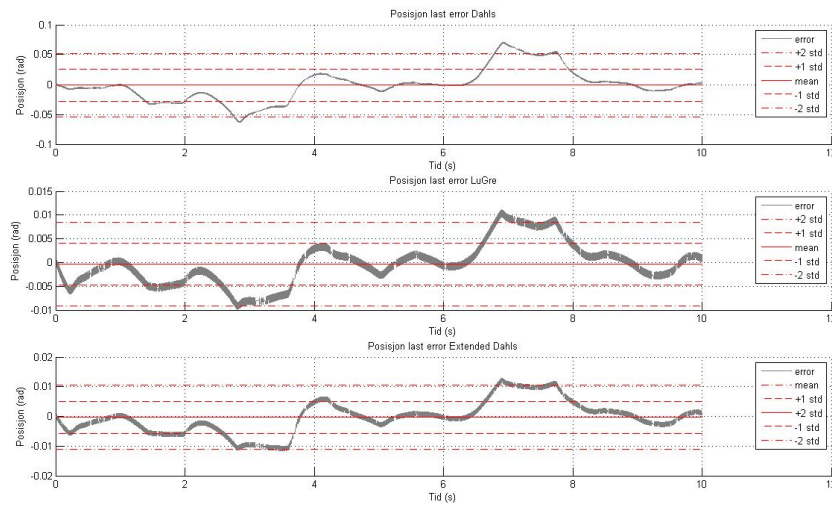
Tabell 6.2.6: Middelverdier, standardavvik og RMS til feilen simulert ved 10KHz samplingsfrekvens, se også figur 6.2.6.

Som nevnt i avsnitt 3.3 og 3.4.3 skyldes dette antagelig de gitte kriteriene for samplingstid og oppløsning.

### 6.2.3 Sammenligning av simuleringsmodell 10KHz

Systemet er også simulert ved 10KHz for å vise hvilken forbedring dette medfører. Systemet har her samme betingelser og referanse signal som for simuleringen ved 1KHz. Resultatene for feilen vises i tabell 6.2.6 og plottet i figur 6.2.6.

Som vi ser er det her vi klarer å dra full nytte av parametrene som gjør seg gjeldende i stictionsfasen. Dette vises spesielt godt ved LuGre og Extended Dahl's modellene som her gir oss en markant forbedring mens Dahl's modellen har tilnærmet like resultater som for simuleringen ved 1KHz. Det er kanskje noe overraskende at LuGre modellen ikke gir bedre resultater, noe som også her



Figur 6.2.6: Samplingsfrekvens 10KHz. Her ser man at LuGre og Extended Dahl's modellene gir en klar forbedring av feilen. Vi ser også at Dahl's modellen som ikke tar med sticktion og stripebeck effekten ikke har nevneverdig forbedring ved høyere samplingsfrekvens. (NB! y-aksen er forskjellig på plottene). Se tabell 6.2.6 for middelverdier (mean) og standardavvik (std).

sannsynligvis skyldes forutsetningene for parameterestimeringen.

Ser man på plottet for lastposisjonen i figur 6.2.7 har man tilnærmet helt kompensert for friksjonen ved bruk av Extended Dahl's og LuGre modellene.

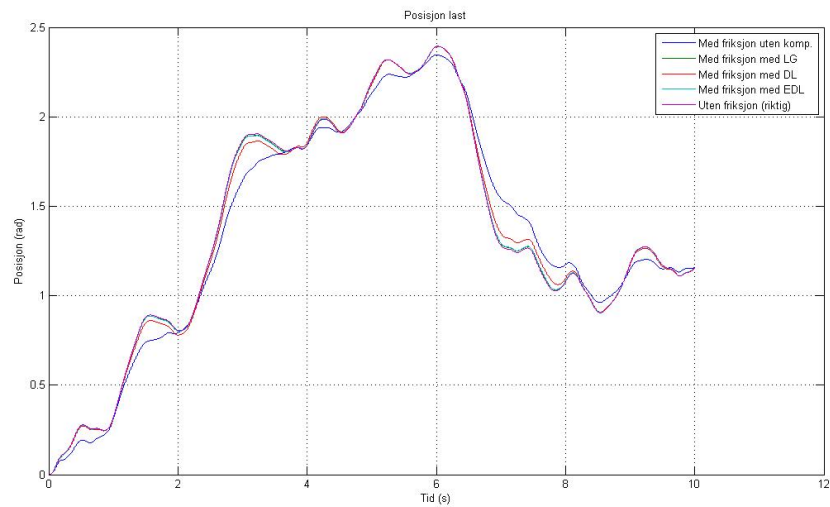
#### 6.2.4 Sammenligning av implementeringsmodell

Det har også blitt simulert hvordan implementeringsmodellen fungerer for kompensasjon i systemet. Dette gjøres ved samme forutsetninger vedrørende støy og initialverdier som benyttet for simuleringsmodellen. Det har imidlertid blitt brukt et annet referanse signal for hastigheten til objektet som observeres. Dette er laget ved modellen vist i figur 6.2.8.

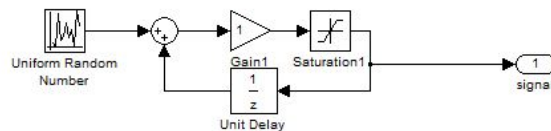
Som vi ser er hastigheten her avhengig av tidligere hastighet og det er satt en begrensning for maks/min hastighet. Begrensningen for hastigheten er satt til  $\pm\pi/10$  rad/s og den uniforme støyen kan maksimalt variere mellom  $\pm\pi/500$  rad/s med en samplingtid på 1ms. Resultatene av simuleringen er vist ved feilen i tabell 6.2.7 og plottet i figur 6.2.9.

Som vi ser her får vi også her relativt like resultater for de tre modellene og at LuGre og Extended Dahl's modellene har tilnærmet helt like resultater.

En liten kommentar til plottet for Dahl's modell i figur 6.2.9 er den ganske tydelige oscillatoriske bevegelse i begynnelsen. Dette viser at lastposisjonen har en rykkete bevegelse som man kan anta skyldes mangel på beskrivelse av sticktionsfasen og mikrodempning i modellen. Dette fører til problemer med å beskrive stick-slip bevegelsen og dermed dempe denne. En annen indikasjon på dette er at Extended Dahl's modellen som heller ikke tar med seg sticktionen



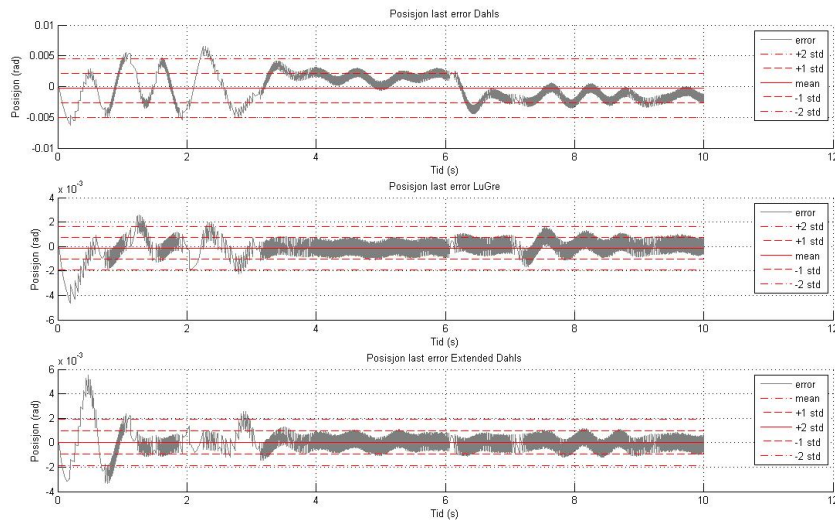
Figur 6.2.7: Samplingsfrekvens 10KHz. Her ser man at LuGre og Extended Dahl's modellene gir en klar forbedring. Vi ser også at Dahl's modellen som ikke tar med sticktion og stripeck effekten ikke gir nevneverdig forbedring ved høyere samplingsfrekvens.



Figur 6.2.8: Signalet tilført ved sammenligning av implementeringsmodellene.

	DL	LG	EDL	Samplingsfrekvens
Middelverdi	-2.7984e-4	-1.4753e-4	2.1193e-5	1KHz
Standardavvik	2.3926e-3	8.7845e-4	9.5976e-4	1KHz
RMS Error	2.4089e-3	8.9070e-4	9.5994e-4	1KHz

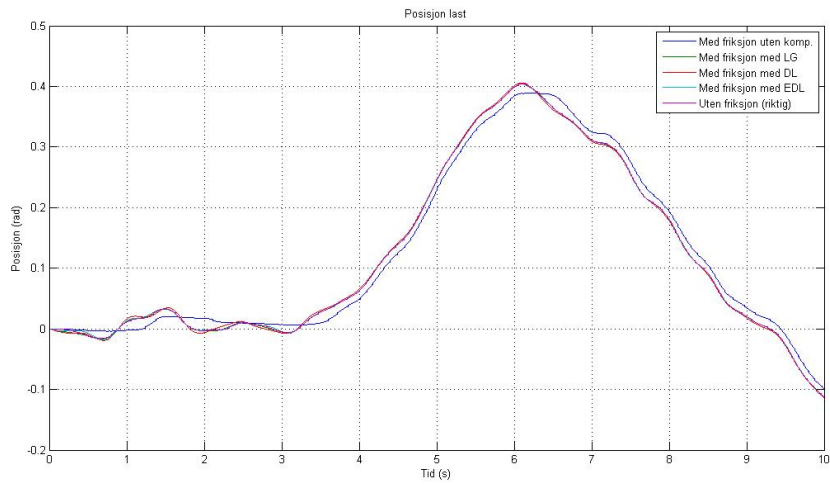
Tabell 6.2.7: Middelverdier, standardavvik og RMS til feilen simulert ved 1KHz samplingsfrekvens, se også figur 6.2.9.



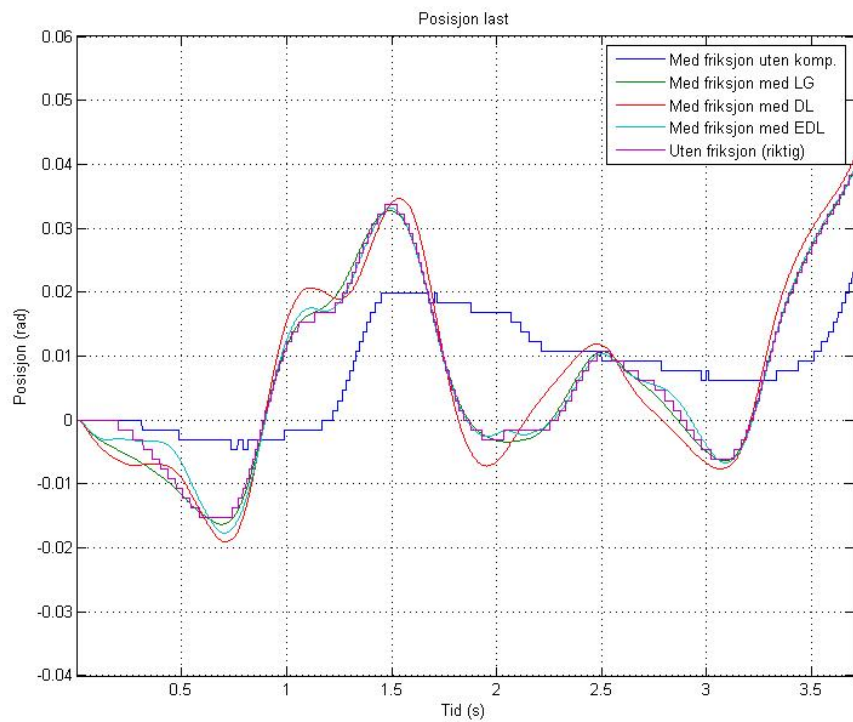
Figur 6.2.9: Feilen til posisjonen ved simulering med implementeringsmodellen (NB! y-aksen er forskjellig på plottene). Se tabell 6.2.7 for middelerverdier (mean) og standardavvik (std).

men har et led for mikrodempningen også har en svak oscillasjon i starten men hurtig demper denne. Det er ikke gjort vidre undersøkelser, men det sees som en sannsynlig årsak til dette.

Som for simuleringsmodellen er det her også vist ved simulering lastposisjonen sammenlignet med systemer med- og uten- friksjon. Som vi ser av plottet i figur 6.2.10 får vi her en klar forbedring med kompensasjon for alle modellene. Legg også merke til at Dahl's modellen er den som har størst problemer i startfasen hvor hastigheten er lav og posisjonen ligger rundt null. Dette vises best ved plottet i figur 6.2.11 som er en forstørrelse av begynnelsen på plottet i figur 6.2.10.



Figur 6.2.10: Sammenligning av lastposisjon for de tre modellene.



Figur 6.2.11: Sammenligning av lastposisjon for de tre modellene forstørret. Legg merke til at Dahl's modellen har størst problemer i denne fasen

Beskrivelse	verdi
Prosess støy:	$w_p \sim \mathcal{N}(0, 0.005)$
Målestøy motor:	$v_m \sim \mathcal{N}(0, 0.005)$
Målestøy last:	$v_l \sim \mathcal{N}(0, 0.05)$

Tabell 6.3.1: Middelverdi og varians for støyen

Beskrivelse	diagonal elementer
Dahl's:	$[[1 \ 1 \ 1 \ 1] * 100000 \ 100 \ 1]$
LuGre:	$[[1 \ 1 \ 1 \ 1] * 100000 \ [100 \ 1 \ 20 \ 100 \ 20 \ 0.1]]$
Extended Dahl's:	$[[1 \ 1 \ 1 \ 1] * 100000 \ [1000 \ 1 \ 100 \ 20]]$

Tabell 6.3.2: Diagonalelementene for initial kovarians

### 6.3 Parameterestimering med reelle data

Det er forsøkt å estimere de forskjellige friksjonsparametrene ved bruk av måledata tatt opp hos KPS. Disse er laget på det reelle system stående på et ratebord. Det er laget flere måleserier og blitt valgt ut tre forskjellige som er brukt til parameterestimeringen. Disse er:

- D1: Ratebordet står stille og RWS kjøres manuelt. Måleserien er på 30 sekunder.
- D2: Kun ratebord, sinusbevegelse med amplitude 0.1 rad og frekvens 0.25 Hz. Måleserien er på 30 sekunder.
- D3: Ratebordet kjøres med opptak av bevegelse til et kjøretøy og RWS kjøres i tillegg manuelt. Måleserien er på 50 sekunder.

Støy og initialverdier for kovariansen er vist i tabell 6.3.1 og 6.3.2. Initialverdier for tilstandene til selve systemet er i likhet med for simuleringene satt til  $\underline{x}_0 = \underline{0}$  og de initielle verdiene for parametrene  $\underline{p}$  som skal estimeres vises i tabell 6.3.3.

Beskrivelse	Betegnelse	verdi
Mikrostivhet	$\sigma_0$	$1e4 \ N/m$
Mikrodempning	$\sigma_1$	$18.6874 \ N/ms^{-1}$
Coulombfriksjon ( $F_c$ )	$\alpha_0$	$1.0 \ N$
Stiksjonsdifferansen ( $F_s - F_c$ )	$\alpha_1$	$0.5 \ N$
Viskøsfriksjon ( $F_v$ )	$\alpha_2$	$0.7 \ N/ms^{-1}$
Stribeckhastigheten	$v_0$	$0.01 \ ms^{-1}$

Tabell 6.3.3: Initialverdiene til de ukjente parametrene brukt under parameterestimeringen

	$\sigma_0$	$\sigma_1$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$v_0$
Dahl's	9.9959e3	-	0.9375	-	-	-
LuGre	1.0000e4	18.9003	0.8186	0.4900	0.9055	5.4607e-3
Extended Dahl's	1.0000e4	18.8288	0.8025	-	1.2824	-

Tabell 6.3.4: Resultater av parameterestimering med data tatt opp hos KPS. Parameterestimatenes er middelverdien av parametrene estimert ved tre forskjellige måleserier.

Parameterene for hver måleserie er beregnet ut fra middelverdien av de  $10^4$  siste estimatene og resultatet av parameterestimatenes er igjen et middel av de tre forskjellige måleseriene. Se vedlegg F for grunnlaget og resultater av alle måleseriene. De endelige parametrene er presentert i tabell 6.3.4 for de tre modellene.

## 6.4 Testing av estimerte parametre

Det er brukt et EKF for test av de estimerte parametre, dette er laget på grunnlag av det ikke utvidede systemet som dannet utgangspunkt for parameterestimatoren. Dette er laget fordi man ikke har noen kjenskap til friksjonen i systemet og det dermed vil være vanskelig å lage en sammenlikning for hvor gode estimatene er. Men ved å sammenligne målte data med systemmodellen inneholdende friksjon bør dette kunne gi en god indikasjon på om den estimert friksjon sammsvarer med målingene.

Verdien for RMS til feilene er gitt ved:

$$RMS\ Error = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - r_i)^2} \quad (6.4.1)$$

hvor  $y_i$  målt verdi og  $r_i$  er den estimerte verdien med friksjon.

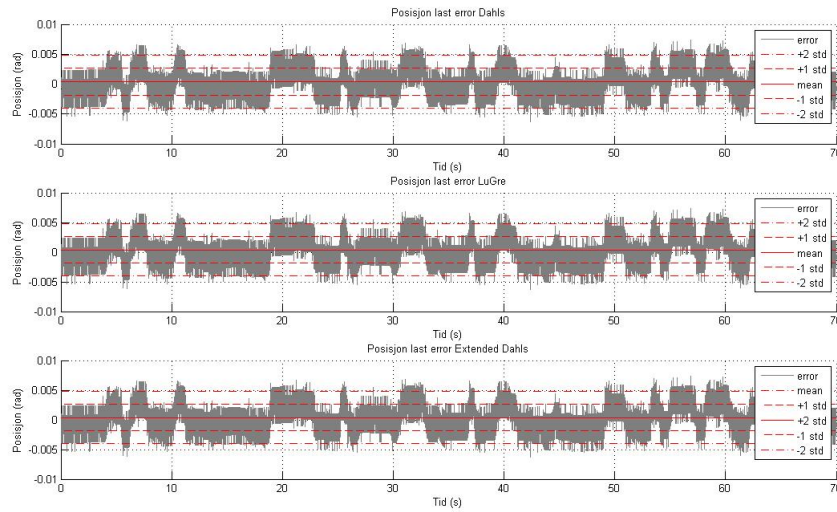
Initialverdier for tilstanden  $\underline{x}$  og støyen er som for parameterestimeringen mens initiell kovarians er satt til en diagonalmatrise med  $10^5$  som diagonalelementene for alle modellene. Se plottet i figur 6.4.1 og tabellene 6.4.2 og 6.4.1 for differansen mellom målt- og estimert- posisjon på lastakslingen.

Modell	RMS error
Dahl's	0.002257876728213
LuGre	0.002257834930457
Extended Dahl's	0.002257873188295

Tabell 6.4.1: RMS til sammenlikning av lastposisjon testet med EKF, se også figur 6.4.1.

Som vi ser ut fra figur og tabeller virker det som om alle modellene har gode estimater for parametrene i henhold til de gitte betingelsene. Dette antas på





Figur 6.4.1: Feilen til posisjonen testet med EKF. Se tabell 6.4.2 for middelveier (mean) og standardavvik (std).

Modell	Middelveier	Standardavvik
Dahl's	4.005057873584375e-4	0.002222087525793
LuGre	4.006847614965927e-4	0.002222012787662
Extended Dahl's	4.005496355015251e-4	0.002222076025111

Tabell 6.4.2: Middelveier til sammenlikning av lastposisjon testet med EKF, se også figur 6.4.1.

bakgrunn av at alle modellene gir et lavt avvik fra det målte signalet og man må kunne konkludere med at parametrestimatene er så nærme som forutsetningene tillater.

Vi ser også at alle verdier her er tilnærmet like for alle modellene og det må kunne antas at det resterende avviket skyldes andre årsaker som støy eller andre ukjente forutsetninger.

Det bør bemerkes at vi her ikke ser en sammenlikning for et kompensert system men en sammenlikning av et system med friksjon sammenlignet med et system med estimert friksjon.



## Kapittel 7

# Konklusjon

### 7.1 Drøfting av resultater

Denne rapporten tar for seg tre friksjonsmodeller; Dahl's-, LuGre,- og Extended Dahl's modell. Dahl's og LuGre modellene er godt dokumenterte og anerkjente friksjonsmodeller. I tillegg er det laget en ny modell for friksjon, kalt Extended Dahl's modell, som er tiltenkt systemer hvor man ikke har gode nok måledata tilgjengelige.

Det er sett på hvilke forbedringer de ulike modellene gir til modellen levert av KPS ved simulering. Men resultatene vil også gi oss et generelt grunnlag for kompensering i andre systemer.

Det er også estimert modellparametre fra egengenererte måledata og måledata tatt opp hos KPS. Estimerte parametre er testet og sammenlignet med systemer med og uten friksjon. Det har i tillegg blitt laget en egen kompensasjonsmodell beregnet for implementering i en mikrokontroller.

Det er vist ved simulering at alle friksjonsmodellene gir en markant forbedring til systemet og spesielt hvis man har tilgang til målinger med høy samplingfrekvens. Det er kanskje ett av de viktigste kriteriene for å kunne gi et godt friksjonsestimat.

Det er brukt et Extended Kalmanfilter under parameterestimering, Dette fungerer greit, men det er ikke å komme utenom at det er problemer med å gi gode estimer for de parametrene som gjør seg gjeldene under sticktionsfasen. Det er kanskje spesielt mikrostivheten ( $\sigma_0$ ) som har vist seg å være problematisk å estimere.

Det er konkludert med at forutsetningene for parameterestimeringen ikke er god nok i sticktionsfasen og det antas at dette sannsynlig også ville være et problem for andre metoder.

Valget av modell kan best gjøres hvis man deler dette opp i to hovedproblemstillinger:

- Hvor gode målinger har man tilgang til ved kompensasjon?
- Hvor gode modellparametre klarer man å estimere?

Har man mulighet til å kunne utføre egne eksperimenter på systemet med målinger som tilfredstiller krav til oppløsning og samplingfrekvens i henhold til de anbefalingene Olsson gir i [17] har man trolig mye og hente på dette under parameterestimeringen.

Da friksjon oppfører seg forskjellig under løsrivningsfasen og under bevegelse vil det antaglig være en stor fordel om man kan dele parameterestimeringen inn i to deler hvor man estimerer parametre for løsrivningsfasen og bevegelse hver for seg.

Dette resulterer i følgende for valget av modell:

- **LuGre modellen:**

Hvis man både har tilgang på gode parameterestimat og målingene under kompensasjon tilfredstiller alle krav gitt av Olsson, vil antaglig bruk av LuGre modellen være det beste valget. Det er da denne modellen fullt og helt får utnyttet det at den tar for seg alle kjente egenskaper ved friksjon.

- **Dahl's modellen:**

For systemer der man har lav oppløsning og samplingfrekvens for målinger og man ikke har mulighet til å gjøre eksperimentelle forsøk som gir bedre utgangspunkt for parameterestimeringen ser det ut som om Dahl's modell kan gi et godt resultat sammenlignet med de andre modellene. Denne kan også være hensiktsmessig da dette er en enkel modell som enkelt bør kunne implementeres i de fleste systemer.

Men har man et system der man stadig holder seg innenfor stictionsfasen bør man kanskje vurdere en Extended Dahl's modell da denne innehar et dempeledd som forhindrer at modellen gir oscillatorisk oppførsel til systemet i denne fasen.

- **Extended Dahl's modellen:**

Har man derimot en situasjon der man ikke fullt ut klarer å tilfredstille kravene for målinger under kompensasjon, men har muligheten til å gjøre forsøk der man kan forbedre kriteriene for parameterestimeringen kan det se ut som om Extended Dahl's modellen kan gi oss vel så gode resultater som det man får ved bruk av LuGre modellen.

Den har også vist ved simulering at den tåler sammenligning med LuGre selv ved gode måledata. Det vil derfor være en avveining om krav til presisjon sammenlignet med tilgjengelige ressurser for kalkulasjon som bør ligge til grunn for valg i disse tilfellene.

Som vi ser er det vanskelig å gi et entydig svar på valget av den beste kompensasjonsmodellen da det er flere faktorer som vil spille inn ved et slikt valg.

Konklusjonen for systemet levert av KPS vil være bruk av en Extended Dahl's modell. Dette begrunnes med at denne ser ut til å gi best resultat ved de gitte forutsetningene dersom man klarer å estimere gode parametere.

## 7.2 Videre arbeid

Da det antas at de største problemene med friksjonskompensasjonen skyldes parameterestimering og kanskje spesielt krav til målinger vil det være naturlig å se videre på problemer rundt dette:

- Det bør sees på om det er mulig å forbedre metoden for parameterestimering. Det bør undersøkes om det er mulig å gjøre forbedringer med opptak av måleserier eventuelt se om det er mulig å frembringe spesielt gunstige bevegelser for observasjons objektet. Det bør også sees på muligheter ved bruk av andre metoder. Dette gjelder spesielt for de parametrene som gjør seg gjeldende under stiction.
- Se på muligheten for å estimere færre parametere. Tenker kanskje her spesielt for Extended Dahl's modell. Dette ved test av forskjellige verdier for microstivheten  $\sigma_0$  og kalkulere seg frem til mikrodempningen  $\sigma_1$  ved ønsket om å opprettholde kritisk dempning.
- Da friksjonen kan variere og parametre kan være tidsvariante, og kanskje spesielt med hensyn på temperatur og slitasje bør det sees på muligheter for løpende parameterestimering i kompensasjonsmodellen. Det vil også være interessant å se på hvordan endring i parametre vil påvirke både kompensasjonen og systemet forøvrig.

Da det er presentert en ny modell for friksjon; Extended Dahl's modell, vil videre undersøkelser og arbeid med denne være naturlig. Det vil i første omgang anbefales at det sees videre på:

- En grundigere teoretisk utledning. Da det kun er vist ved simulering hvilken forbedring modellen gir vil det være av interesse å underbygge disse resultatene teoretisk.
- Hvilke krav stilles til målinger for Extended Dahl's modellen. Tenker primert på oppløsningskrav og samplingstider.
- Det bør gjøre fysiske eksperimenter med Extended Dahl's modellen for å undersøke om den gir tilsvarende resultater som vist ved simulering.



# Bibliografi

- [1] B. Armstrong-Helouvry. Frictional lag and stick-slip. In *Robotics and Automation, 1992. Proceedings., 1992 IEEE International Conference on*, pages 1448 –1453 vol.2, may 1992.
- [2] S. Bittanti and S. Garatti. Revisiting the basic issue of parameter estimation in system identification - a new approach for multi-value estimation. In *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pages 1956 –1961, 2008.
- [3] C. Canudas-de Wit. Comments on “a new model for control of systems with friction”. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 43(8):1189 – 1190, August 1998.
- [4] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K.J. Astrom, and P. Lischinsky. A new model for control of systems with friction. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 40(3):419 –425, March 1995.
- [5] Jr. D. A. Haessig and B. Friedland. On the modeling and simulation of friction. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 113(3):354–362, 1991.
- [6] P. Dahl. A solid friction model. *The Aerospace Corp., El segundo, CA Tech. Rep. TOR-0158(3107-18)-1*, 1968.
- [7] C. Canudas de Wit and P. Lischinsky. Adaptive friction compensation with partially known dynamic friction model. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 11(1):65–80, 1997.
- [8] Arthur Gelb (editor). *Applied Optimal Estimation*. The M.I.T. Press, 1974.
- [9] C.H. Edwards and D.E. Penney. *Elementary Differential Equations, with boundary value problems 6ed*. Pearson, Prentice Hall, 2009.
- [10] D. P. Hess and A. Soom. Friction at a lubricated line contact operating at oscillating sliding velocities. *Journal of Tribology*, 112(1):147–152, 1990.
- [11] K. Johanaström and C. Canudas-de Wit. Revisiting the lugre friction model. *Control Systems Magazine, IEEE*, 28(6):101 –114, December 2008.
- [12] Dean Karnopp. Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 107(1):100–103, 1985.

- [13] Tom Lindstrøm Lisa Lorentzen, Arne Hole. *Kalkulus, Med en og flere variabler*. Universitetsforlaget, 2003.
- [14] De-Peng Liu. Parameter identification for lugre friction model using genetic algorithms. In *Machine Learning and Cybernetics, 2006 International Conference on*, pages 3419 –3422, 2006.
- [15] M.S. Madi, K. Khayati, and P. Bigras. Parameter estimation for the lugre friction model using interval analysis and set inversion. In *Systems, Man and Cybernetics, 2004 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 428 – 433 vol.1, 2004.
- [16] H. Olsson, K. J. Astrom, C. C. de Wit, M. Gafvert, and P. Lischinsky. Friction models and friction compensation. *Eur. J. Control*, 4(3):176–195, 1998.
- [17] Henrik Olsson. *Control Systems with Friction*. PhD thesis, Lund Institute of Technology, SE, 1996.
- [18] Ernest Rabinowicz. The nature of the static and kinetic coefficients of friction. *Journal of Applied Physics*, 22(11):1373–1379, 1951.
- [19] Dan Simon. *Optimal State Estimation*. Wiley, 2006.
- [20] Karl J. Åström. Friction models and friction compensation. Lecture notes, 2005.
- [21] Gang Tao and Frank L. Lewis (Eds.). *Adaptive Control of Nonsmooth Dynamic Systems*. Springer, 2001.
- [22] Jan C. Willems. Dissipative dynamic systems. *European Journal of Control*, 2007.



## Tillegg A

# Vedlegg til Dahl's modellen

### A.1 Systemmodellen og matrisene

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \Theta_m & \dot{\Theta}_m & \Theta_l & \dot{\Theta}_l & z \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.1.1})$$

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, u, w, t) \quad (\text{A.1.2})$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (\text{A.1.3})$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -\frac{K_{12}}{N^2 I_m} x_1 - \frac{d_{12}}{N^2 I_m} x_2 + \frac{K_{12}}{N I_m} x_3 \\ & + \frac{d_{12}}{N I_m} x_4 - \frac{\sigma_0}{I_m} x_5 + \frac{K_{Scale} K_t}{I_m} u \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (\text{A.1.5})$$

$$\dot{x}_4 = \frac{K_{12}}{N I_l} x_1 + \frac{d_{12}}{N I_l} x_2 - \frac{K_{12}}{I_l} x_3 - \frac{d_{12}}{I_l} x_4 \quad (\text{A.1.6})$$

$$\dot{x}_5 = x_4 - \frac{\sigma_1 |x_4|}{\alpha_0} x_5 \quad (\text{A.1.7})$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-K_{12}}{N^2 I_m} & \frac{-d_{12}}{N^2 I_m} & \frac{K_{12}}{N I_m} & \frac{d_{12}}{N I_m} & \frac{-\sigma_0}{I_m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{K_{12}}{N I_l} & \frac{d_{12}}{N I_l} & \frac{-K_{12}}{I_l} & \frac{-d_{12}}{I_l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\sigma_1 |x_4|}{\alpha_0} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.8})$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K_{Scale} K_t}{I_m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.9})$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.10})$$

## A.2 Utvidet systemmodell matriser

$$\vec{x}_{aug} = [\Theta_m \quad \dot{\Theta}_m \quad \Theta_l \quad \dot{\Theta}_l \quad z \quad \sigma_0 \quad \alpha_0]^T \quad (\text{A.2.1})$$

$$A_{aug} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-K_{12}}{N^2 I_m} & \frac{-d_{12}}{N^2 I_m} & \frac{K_{12}}{N I_m} & \frac{d_{12}}{N I_m} & \frac{-\sigma_0}{I_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_{12}}{N I_l} & \frac{d_{12}}{N I_l} & \frac{-K_{12}}{I_l} & \frac{-d_{12}}{I_l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\sigma_1 |x_4|}{\alpha_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.2})$$

$$B_{aug} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K_{Scale} K_t}{I_m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.3})$$

$$C_{aug} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.4})$$

## A.3 Lineariserte matriser for Dahl's modellen

$$A_{lin} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} & a_{5,7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.1})$$

Hvor  $A_{lin}$  er  $\in \mathbb{R}^{n,m}$  og  $a_{n,m}$  er:

$$a_{2,1} = -\frac{d_{12}}{I_m N^2} \quad (\text{A.3.2})$$

$$a_{2,2} = -\frac{K_{12}}{I_m N^2} \quad (\text{A.3.3})$$

$$a_{2,3} = \frac{d_{12}}{I_m N} \quad (\text{A.3.4})$$

$$a_{2,4} = \frac{K_{12}}{NI_m} \quad (\text{A.3.5})$$

$$a_{2,5} = -\frac{\sigma_0}{I_m} \quad (\text{A.3.6})$$

$$a_{2,6} = -\frac{z}{I_m} \quad (\text{A.3.7})$$

$$a_{4,1} = \frac{d_{12}}{I_l N} \quad (\text{A.3.8})$$

$$a_{4,2} = \frac{K_{12}}{I_l N} \quad (\text{A.3.9})$$

$$a_{4,3} = -\frac{d_{12}}{I_l} \quad (\text{A.3.10})$$

$$a_{4,4} = -\frac{K_{12}}{I_l} \quad (\text{A.3.11})$$

$$a_{5,4} = 1 - \frac{z\sigma_0\dot{x}_4 \operatorname{sgn}(x_4)}{\alpha_0} \quad (\text{A.3.12})$$

$$a_{5,5} = -\frac{|x_4| \sigma_0}{\alpha_0} \quad (\text{A.3.13})$$

$$a_{5,6} = -\frac{|x_4| z}{\alpha_0} \quad (\text{A.3.14})$$

$$a_{5,7} = \frac{|x_4| z \sigma_0}{\alpha_0^2} \quad (\text{A.3.15})$$

$$C_{lin} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.16})$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1/I_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \quad (\text{A.3.17})$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.18})$$

## A.4 EKF for parameterestimering

---

```

%EKF3_RWS_DL
clear all;
load('egne_rnd_sin_100000_1KHz_b.mat');% måledata
n=100000;
Ts=0.001;

d12=1.1275e3; % Gear dempning
K12=1.8e5; % Gear Stivhet
NG=80; % N Gear
I1=0.0047; %I motor
%I2=17.5; % I last uten nyttelast
I2=26; % I Last med nyttelast

Kt = 0.178;
KScale = 0.4;

% Initielle parametre genererte data
s0=1.0e4; % x6
Fc=0.7; % x7

% Initielle parametre KPS data
% s0=1.0e4; % x6
% Fc=1.0; % x7

q=0.005;
rm=0.005;
r1=0.05;

R=diag([rm r1]);

x=[0 0 0 0 0 s0 Fc]'; % x0
%P=diag([100000 100000 100000 100000 100000 100 1]);% P0 KPS data
P=diag([100000 1000000 1000000 1000000 1000000,...
        [100000 100000]*1]);% P0 genererte data

AA=[0 1 0 0 0 0 0
     -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1) ,...
     (d12/(NG*I1)) -x(6)/I1 0 0
     0 0 0 1 0 0 0
     K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0 0 0
     0 0 0 1 -x(6)*abs(x(4))/x(7) 0 0
     0 0 0 0 0 0 0
     0 0 0 0 0 0 0];
BB=[0 (KScale*Kt)/I1 0 0 0 0 0]';
LL=[0 1/I1 0 0 0 0 0]';
CC=[1 0 0 0 0 0 0
     0 0 1 0 0 0 0];
DD=[0 0]';
Model=ss(AA,BB,CC,DD);
sys=c2d(Model,Ts);

A=sys.a;
B=sys.b;
C=sys.c;
D=sys.d;

```

```

u=simout_u_xm_xl(1:n,1);
ys=simout_u_xm_xl(1:n,2:3);
%Kalman filter
for i = 1:n
    %Time update (TO)
    AA=[0 1 0 0 0 0 0
        -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1),...
        (d12/(NG*I1)) -x(6)/I1 0 0
        0 0 0 1 0 0 0
        K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0 0 0
        0 0 0 1 -x(6)*abs(x(4))/x(7) 0 0
        0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0];
    [A,B]=c2d(AA,BB,Ts);
    x = A*x+B*u(i);
    AL=[0 1 0 0 0 0 0
        -K12/(I1*NG^2),...
        -d12/(I1*NG^2),...
        K12/(I1*NG),...
        d12/(NG*I1),...
        -x(6)/I1 -x(5)/I1 0
        0 0 0 1 0 0 0
        K12/(I2*NG), d12/(I2*NG), -K12/I2, -d12/I2, 0 0 0
        0 0 0 1-x(6)/x(7)*(K12/(NG*I2)*x(1)+d12/(NG*I2)*x(2)-...
        K12/I2*x(3)-d12/I2*x(4))*sign(x(4))*x(5),...
        -x(6)/x(7)*abs(x(4)),...
        -x(5)/x(7)*abs(x(4)),...
        (x(5)*x(6)*abs(x(4)))/x(7)^2
        0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0];
    [A,B]=c2d(AL,BB,Ts);
    P = A*P*A' + LL*q*LL';
    %Observation update (MO)
    K = P*C'/(C*P*C' + R);
    x = x + K*(ys(i,:) - C*x);
    P = (eye(7) - K*C)*P;

    % Lagrer x estimert
    xest(:,i) = x;
end

% Estimerte verdier
s0est=mean(xest(6,n-9999:n));
a0est=mean(xest(7,n-9999:n));

```

## A.5 EKF for testing

---

```

%EKF_DL_testing
clear all;
load('RWS_data_F112345p.mat'); % Laster inn måleserie

n=70000;
K12=1.8e5; % Gear Stivhet
d12=1.1275e3; % Gear dempning
NG=80; %N Gear
I1=0.0047; %I motor
%I2=17.5; % I last
I2=26; % I Last + nyttelast

Kt = 0.178; % Motorens momentkonstant
KScale = 0.4; % Skalering av pådraget

%Dahl parametre
s0=9.9959e3;
Fc=0.9375;

Ts=0.001;

q=0.005;
rm=0.005;
rl=0.05;

R=diag([rm rl]);
x=[0 0 0 0 0]'; % x0
P=eye(5)*100000; % P0

AA=[0 1 0 0 0
     -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1) (d12/(NG*I1)) -s0/I1
     0 0 0 1 0
     K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0
     0 0 0 1 -s0*abs(x(4))/Fc];
BB=[0 (KScale*Kt)/I1 0 0 0]';
LL=[0 1/I1 0 0 0]';
CC=[1 0 0 0 0
     0 0 1 0 0];
DD=[0 0]';
Model=ss(AA,BB,CC,DD);
sys=c2d(Model,Ts);
A=sys.a;
B=sys.b;
C=sys.c;
D=sys.d;

u=simout_u_xm_xl(1:n,1);
ys=simout_u_xm_xl(1:n,2:3);

%Kalman filter
for i = 1:n
    %Time update (TO)
    AA=[0 1 0 0 0
         -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1) d12/(NG*I1) -s/I1
         0 0 0 1 0
    ]

```

```

        K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0
        0 0 0 1 -s*abs(x(4))/Fc];
Model=ss(AA,BB,CC,DD);
sys=c2d(Model,Ts);
A=sys.a;
x = A*x+B*u(i);
AL=[0 1 0 0 0
    -K12/(I1*NG^2) -d12/(I1*NG^2) K12/(I1*NG) d12/(NG*I1) -s/I1
    0 0 0 1 0
    K12/(I2*NG), d12/(I2*NG), -K12/I2, -d12/I2, 0
    0 0 0 1-s/Fc*(K12/(NG*I2)*x(1)+d12/(NG*I2)*x(2)-...
    K12/I2*x(3)-d12/I2*x(4))*sign(x(4))*x(5) -s/Fc*abs(x(4))];
Model=ss(AL,BB,CC,DD);
sys=c2d(Model,Ts);
A=sys.a;
P = A*P*A' + LL*q*LL';
%Observation update (MO)
K = P*C'/(C*P*C' + R);
x = x + K*(ys(i,:) - C*x);
P = (eye(5) - K*C)*P;
% Lagrange estimator
xest(:,i) = x;
end

```

---

EKF\_DL\_testing.m





## Tillegg B

# Vedlegg til LuGre modellen

### B.1 Systemmodellen og matrisene

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \Theta_m & \dot{\Theta}_m & \Theta_l & \dot{\Theta}_l & z \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.1.1})$$

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, u, w, t) \quad (\text{B.1.2})$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (\text{B.1.3})$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -\frac{K_{12}}{N^2 I_m} x_1 - \frac{d_{12}}{N^2 I_m} x_2 + \frac{K_{12}}{N I_m} x_3 \\ & + \left( \frac{d_{12}}{N I_m} - \frac{\sigma_1 + \alpha_2}{I_m} \right) x_4 \\ & - \frac{\sigma_0}{I_m} \left( 1 - \frac{\sigma_1 |x_4|}{g(x_4)} \right) x_5 + \frac{K_{Scale} K_t}{I_m} u \end{aligned} \quad (\text{B.1.4})$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (\text{B.1.5})$$

$$\dot{x}_4 = \frac{K_{12}}{N I_l} x_1 + \frac{d_{12}}{N I_l} x_2 - \frac{K_{12}}{I_l} x_3 - \frac{d_{12}}{I_l} x_4 \quad (\text{B.1.6})$$

$$\dot{x}_5 = x_4 - \frac{\sigma_1 |x_4|}{g(x_4)} x_5 \quad (\text{B.1.7})$$

$$g(x_4) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-\left(\frac{x_4}{v_0}\right)^2} \quad (\text{B.1.8})$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-K_{12}}{N^2 I_m} & \frac{-d_{12}}{N^2 I_m} & \frac{K_{12}}{N I_m} & \left( \frac{d_{12}}{N I_m} - \frac{\sigma_1 + \alpha_2}{I_m} \right) & \frac{-\sigma_0}{I_m} \left( 1 - \frac{\sigma_1 |x_4|}{g(x_4)} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{K_{12}}{N I_l} & \frac{d_{12}}{N I_l} & \frac{-K_{12}}{I_l} & \frac{-d_{12}}{I_l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\sigma_1 |x_4|}{g(x_4)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.9})$$

(B.1.10)

(B.1.11)

## B.2 Utvidet systemmodell matriser

(B.2.1)

Hvor  $\vec{x}_{aug}$  er  $\in \mathbb{R}^n$

(B.2.2)

(B.2.3)

(B.2.4)

**B.3 Linearisete matriser for for LuGre modellen**

$$A_{lin} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} & a_{2,7} & a_{2,8} & a_{2,9} & a_{2,10} & a_{2,11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} & 0 & a_{5,8} & a_{5,9} & 0 & a_{5,11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3.1})$$

Hvor  $A_{lin}$  er  $\in \mathbb{R}^{n,m}$  og  $a_{n,m}$  er:

$$a_{2,1} = -\frac{K_{12}}{I_1 N^2} \quad (\text{B.3.2})$$

$$a_{2,2} = -\frac{d_{12}}{I_1 N^2} \quad (\text{B.3.3})$$

$$a_{2,3} = \frac{K_{12}}{I_1 N} \quad (\text{B.3.4})$$

$$a_{2,4} = \frac{d_{12}}{N I_1} + \frac{2e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} |x_4| x_4 x_5 \alpha_1 \sigma_0 \sigma_1}{I_1 v_0^2 \left( \alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1 \right)^2} - \frac{\alpha_2 + \sigma_1}{I_1} + \frac{x_5 \sigma_0 \sigma_1 \dot{x}_4 \operatorname{sgn}(x_4)}{I_1 \left( \alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1 \right)} \quad (\text{B.3.5})$$

$$a_{2,5} = -\frac{\sigma_0}{I_1} + \frac{|x_4| \sigma_0 \sigma_1}{I_1 \left( \alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1 \right)} \quad (\text{B.3.6})$$

$$a_{2,6} = -\frac{x_5}{I_1} + \frac{|x_4| x_5 \sigma_1}{I_1 \left( \alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1 \right)} \quad (\text{B.3.7})$$

$$a_{2,7} = -\frac{x_4}{I_1} + \frac{|x_4| x_5 \sigma_0}{I_1 \left( \alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1 \right)} \quad (\text{B.3.8})$$

$$a_{2,8} = -\frac{|x_4| x_5 \sigma_0 \sigma_1}{I_1 \left( \alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1 \right)^2} \quad (\text{B.3.9})$$

$$a_{2,9} = -\frac{e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} |x_4| x_5 \sigma_0 \sigma_1}{I_1 \left( \alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1 \right)^2} \quad (\text{B.3.10})$$

$$a_{2,10} = -\frac{x_4}{I_1} \quad (\text{B.3.11})$$

$$a_{2,11} = -\frac{2e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} |x_4| x_4^2 x_5 \alpha_1 \sigma_0 \sigma_1}{I_1 v_0^3 \left( \alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1 \right)^2} \quad (\text{B.3.12})$$

$$a_{4,1} = \frac{K_{12}}{I_2 N} \quad (\text{B.3.13})$$

$$a_{4,2} = \frac{d_{12}}{I_2 N} \quad (\text{B.3.14})$$

$$a_{4,3} = -\frac{K_{12}}{I_2} \quad (\text{B.3.15})$$

$$a_{4,4} = -\frac{d_{12}}{I_2} \quad (\text{B.3.16})$$

$$a_{5,4} = 1 - \frac{2e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} |x_4| x_4 x_5 \alpha_1 \sigma_0}{v_0^2 \left( \alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1 \right)^2} - \frac{x_5 \sigma_0 \dot{x}_4 \operatorname{sgn}(x_4)}{\alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1} \quad (\text{B.3.17})$$

$$a_{5,5} = -\frac{|x_4| \sigma_0}{\alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1} \quad (\text{B.3.18})$$

$$a_{5,6} = -\frac{|x_4| x_5}{\alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1} \quad (\text{B.3.19})$$

$$a_{5,8} = \frac{|x_4| x_5 \sigma_0}{\left( \alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1 \right)^2} \quad (\text{B.3.20})$$

$$a_{5,9} = \frac{e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} |x_4| x_5 \sigma_0}{\left( \alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1 \right)^2} \quad (\text{B.3.21})$$

$$a_{5,11} = -\frac{2e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} |x_4| x_4^2 x_5 \alpha_1 \sigma_0}{v_0^3 \left( \alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1 \right)^2} \quad (\text{B.3.22})$$

$$C_{lin} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3.23})$$

$$L = (0 \quad 1/I_m \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \quad (\text{B.3.24})$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3.25})$$

## B.4 EKF for parameterestimering

---

```

%EKF3_RWS_LG
clear all;
load('egne_rnd_sin_100000_1KHz_b.mat'); % måledata
n=100000;
Ts=0.001;

K12=1.8e5;%Gear Stivhet %1.1275e3; % Gear dempning K12
d12=1.1275e3;% Gear dempning %1.8e5; %Gear Stivhet
NG=80; %N Gear
I1=0.0047; %I motor
%I2=17.5; % I last
I2=26; % I Last + nyttelast
IM=I1+(I2/(NG^2)); % I modell sett fra motor
%I2=26+0.0047*NG^2;

% LuGre init parametre
s0i=1e4; % Bristle stivhet (x6)
s1i=20;%2*sqrt(s0i*IM); % Bristle damping (x7)
a0i=0.7;%1.23; % Fc (x8)
a1i=0.45; % Fs-Fc (x9)
a2i=0.7; % Fv (x10)
v0i=0.0085; % Stribeck hastighet (x11)

Kt = 0.178;
KScale = 0.4;

q=0.005;
rm=0.005;
rl=0.05;

Q=q;
R=diag([rm rl]);

x=[0 0 0 0 0 s0i s1i a0i a1i a2i v0i]'; % x0

AA=[0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1) ,...
(d12/(NG*I1)-(x(7)+x(10))/I1) -x(6)/I1*(1-x(7)*abs(x(4))*...
(1/(x(8)+x(9)*exp(-(x(4)/x(11))^2)))) 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 -x(6)*abs(x(4))*(1/(x(8)+x(9))*...
exp(-(x(4)/x(11))^2))) 0 0 0 0 0 0
zeros(6,11)];
BB=[0 (KScale*Kt)/I1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]';
BL=[0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]';
CC=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0];
LL=[0 1/I1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]';
DD=[0 0]';
Model=ss(AA,BB,CC,DD);
sys=c2d(Model,Ts);

A=sys.a;
```

```

B=sys.b;
C=sys.c;
D=sys.d;

% P=diag([100000 100000 100000 100000 100000,...
%         [100 1 20 100 20 0.1]]); % KPS data
P=diag([100000 100000 100000 100000 100000,...
        [1000 100 1000 100 10000 1]]); % Genererte data

u=simout_u_xm_xl(1:n,1);
ys=[simout_u_xm_xl(1:n,2:3)];

%Kalman filter
for i = 1:n
    AA=[0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
        -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1),...
        (d12/(NG*I1)-(x(7)+x(10))/I1),...
        -x(6)/I1*(1-x(7)*abs(x(4))*(1/(x(8)+x(9)*...
        exp(-(x(4)/x(11))^2))))),...
        0 0 0 0 0 0
        0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
        K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2,...
        0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 1 -x(6)*abs(x(4))*(1/(x(8)+x(9)*...
        exp(-(x(4)/x(11))^2))) 0 0 0 0 0 0
        zeros(6,11)];
    [A,B]=c2d(AA,BB,Ts);
    x = A*x+B*u(i);
    AL=[0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
        -K12/(I1*NG^2), -d12/(I1*NG^2), K12/(I1*NG),...
        -x(10)/I1+d12/(I1*NG)-x(7)/I1+...
        (2*x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2))*x(6)*x(7)*x(4)*...
        x(5)*abs(x(4)))/((x(8)+x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2)))^2*...
        I1*x(11)^2)+(x(6)*x(7)*x(5)*(K12/(NG*I2)*x(1)+...
        d12/(NG*I2)*x(2)-K12/I2*x(3)-d12/I2*x(4))*...
        sign(x(4)))/((x(8)+...
        x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2))*I1),...
        -x(6)/I1+(x(6)*x(7)*abs(x(4)))/((x(8)+...
        x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2))*I1),...
        -x(5)/I1+(x(7)*x(5)*abs(x(4)))/((x(8)+...
        x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2))*I1),...
        -x(4)/I1+(x(6)*x(5)*abs(x(4)))/((x(8)+...
        x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2))*I1),...
        -(x(6)*x(7)*x(5)*abs(x(4)))/((x(8)+...
        x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2)))^2*I1),...
        -exp(-(x(4)^2/x(11)^2))*x(6)*...
        x(7)*x(5)*abs(x(4)))/((x(8)+...
        x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2)))^2*I1),...
        -x(4)/I1,...
        -(2*x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2))*x(6)*x(7)*x(4)^2*x(5)*...
        abs(x(4)))/((x(8)+x(9)*...
        exp(-(x(4)^2/x(11)^2)))^2*I1*x(11)^3)
        0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
        K12/(I2*NG), d12/(I2*NG), -K12/I2, -d12/I2, 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0,...
        1-(2*x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2))*x(6)*x(4)*x(5)*...
        abs(x(4)))/((x(8)+x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2)))^2*...

```

```

x(11)^2)-(x(6)*x(5)*(K12/(NG*I2)*x(1)+d12/(NG*I2)*...
x(2)-K12/I2*x(3)-d12/I2*x(4))*sign(x(4)))/(x(8)+...
x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2))),...
-(x(6)*abs(x(4)))/(x(8)+x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2))),...
-(x(5)*abs(x(4)))/(x(8)+x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2))),0,...
(x(6)*x(5)*abs(x(4)))/(x(8)+x(9)*...
exp(-(x(4)^2/x(11)^2)))^2,...
(exp(-(x(4)^2/x(11)^2))*x(6)*x(5)*...
abs(x(4)))/(x(8)+x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2)))^2,0,...
(2*x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2))*x(6)*x(4)^2*x(5)*...
abs(x(4)))/(x(8)+x(9)*exp(-(x(4)^2/x(11)^2)))^2*x(11)^3
zeros(6,11)];
[A,B]=c2d(AL,BB,Ts);
P = A*P*A' + LL*Q*LL';
%Observation update (MO)
K = P*C'/(C*P*C' + R);
x = x + K*(ys(i,:) - C*x);
P = (eye(11) - K*C)*P;
% Lagrer x estimert
xest(:,i) = x;
end

% Velger parametre
vidu=9999;
s0est=mean(xest(6,n-vidu:n));
s1est=mean(xest(7,n-vidu:n));
a0est=mean(xest(8,n-vidu:n));
a1est=mean(xest(9,n-vidu:n));
a2est=mean(xest(10,n-vidu:n));
v0est=mean(xest(11,n-vidu:n));

```

---

EKF3\_RWS\_LG.m



## B.5 EKF for testing

---

```

%EKF_LG_testing
clear all;
load( 'RWS_data_F112345p.mat' ); % Laster inn måleserie

n=70000;
K12=1.8e5; % Gear Stivhet
d12=1.1275e3; % Gear dempning
NG=80; %N Gear
I1=0.0047; %I motor
%I2=17.5; % I last
I2=26; % I Last + nyttelast

Kt = 0.178; % Motorens momentkonstant
KScale = 0.4; % Skalering av pådraget

% Estimerte parametre med måledata fra KPS esstimert med EKF3_LG
s0=1e4; % Bristle stivhet
s1=18.9003; % Bristle damping
a0= 0.8186; % Fc
a1= 0.4900; % Fs-Fc
a2=0.9055; % Fv
v0=5.4607e-3; % Stribeck hastighet

Ts=0.001; % Samplingtid

q=0.005; % prosesstøy
rm=0.005; % målestøy motor
rl=0.05; % målestøy last

R=diag([rm rl]);
x=[0 0 0 0 0]'; % x0
P=eye(5)*100000; % P0

AA=[0 1 0 0 0
    -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1) ,...
    (d12/(NG*I1)-(s1+a2)/I1) -s0/I1*(1-s1*abs(x(4)))*...
    (1/(a0+a1*exp(-(x(4)/v0)^2))))
    0 0 0 1 0
    K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0
    0 0 0 1 -s0*abs(x(4))*(1/(a0+a1*exp(-(x(4)/v0)^2)))];
BB=[0 (KScale*Kt)/I1 0 0 0]';
LL=[0 1/I1 0 0 0]';
CC=[1 0 0 0 0
    0 0 1 0 0];
DD=[0 0]';
Model=ss(AA,BB,CC,DD);
sys=c2d(Model,Ts);

A=sys.a;
B=sys.b;
C=sys.c;
D=sys.d;

u=simout_u_xm_xl(1:n,1);
ys=simout_u_xm_xl(1:n,2:3);

```

```

%Kalman filter
for i = 1:n
    %Time update (TO)
    AA=[0 1 0 0 0
        -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1) ,...
        (d12/(NG*I1)-(s1+a2)/I1) -s0/I1*(1-s1*abs(x(4)))*...
        (1/(a0+a1*exp(-(x(4)/v0)^2))))
        0 0 0 1 0
        K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0
        0 0 0 1 -s0*abs(x(4))*(1/(a0+a1*exp(-(x(4)/v0)^2)))]];
    Model=ss(AA,BB,CC,DD);
    sys=c2d(Model,Ts);
    A=sys.a;
    x = A*x+B*u(i);
    AL=[0 1 0 0 0
        -K12/(I1*NG^2), -d12/(I1*NG^2), K12/(I1*NG) ,...
        -a2/I1+d12/(I1*NG)-s1/I1+(2*a1*exp(-(x(4)^2/v0^2))*...
        s0*s1*x(4)*x(5)*abs(x(4)))/...
        ((a0+a1*exp(-(x(4)^2/v0^2)))^2*I1*v0^2)+...
        (s0*s1*x(5)*(K12/(NG*I2)*x(1)+d12/(NG*I2)*x(2)-...
        K12/I2*x(3)-d12/I2*x(4))*sign(x(4)))/...
        ((a0+a1*exp(-(x(4)^2/v0^2))*I1)) ,...
        -s0/I1+(s0*s1*abs(x(4)))/((a0+a1*exp(-(x(4)^2/v0^2))*I1)
        0 0 0 1 0
        K12/(I2*NG), d12/(I2*NG), -K12/I2, -d12/I2, 0
        0 0 0 1-(2*a1*exp(-(x(4)^2/v0^2))*s0*x(4)*x(5)*...
        abs(x(4)))/((a0+a1*exp(-(x(4)^2/v0^2)))^2*v0^2)-...
        (s0*x(5)*(K12/(NG*I2)*x(1)+d12/(NG*I2)*x(2)-K12/I2*x(3)-...
        d12/I2*x(4))*sign(x(4)))/(a0+a1*exp(-(x(4)^2/v0^2)) ,...
        -(s0*abs(x(4)))/(a0+a1*exp(-(x(4)^2/v0^2)))]];
    Model=ss(AL,BB,CC,DD);
    sys=c2d(Model,Ts);
    A=sys.a;
    P = A*P*A' + LL*q*LL';
    %Observation update (MO)
    K = P*C'/(C*P*C' + R);
    x = x + K*(ys(i,:) - C*x);
    P = (eye(5) - K*C)*P;
    % Lagrer x estimert
    xest(:,i) = x;
end

```

## Tillegg C

# Vedlegg til Extended Dahl's modellen

### C.1 Systemmodellen og matrisene

$$\vec{x} = [ \Theta_m \quad \dot{\Theta}_m \quad \Theta_l \quad \dot{\Theta}_l \quad z ]^T \quad (C.1.1)$$

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, u, w, t) \quad (C.1.2)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (C.1.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -\frac{K_{12}}{N^2 I_m} x_1 - \frac{d_{12}}{N^2 I_m} x_2 + \frac{K_{12}}{N I_m} x_3 \\ & + \left( \frac{d_{12}}{N I_m} - \frac{\sigma_1 + \alpha_2}{I_m} \right) x_4 \\ & - \frac{\sigma_0}{I_m} \left( 1 - \frac{\sigma_1 |x_4|}{\alpha_0} \right) x_5 + \frac{K_{Scale} K_t}{I_m} u \end{aligned} \quad (C.1.4)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (C.1.5)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{K_{12}}{N I_l} x_1 + \frac{d_{12}}{N I_l} x_2 - \frac{K_{12}}{I_l} x_3 - \frac{d_{12}}{I_l} x_4 \quad (C.1.6)$$

$$\dot{x}_5 = x_4 - \frac{\sigma_1 |x_4|}{\alpha_0} x_5 \quad (C.1.7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-K_{12}}{N^2 I_m} & \frac{-d_{12}}{N^2 I_m} & \frac{K_{12}}{N I_m} & \left( \frac{d_{12}}{N I_m} - \frac{\sigma_1 + \alpha_2}{I_m} \right) & \frac{-\sigma_0}{I_m} \left( 1 - \frac{\sigma_1 |x_4|}{\alpha_0} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{K_{12}}{N I_l} & \frac{d_{12}}{N I_l} & \frac{-K_{12}}{I_l} & \frac{-d_{12}}{I_l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\sigma_1 |x_4|}{\alpha_0} \end{pmatrix} \quad (C.1.8)$$

(C.1.9)

(C.1.10)

## C.2 Utvidet systemmodell matriser

(C.2.1)

(C.2.2)

(C.2.3)

(C.2.4)

### C.3 Lineariserte matriser for for Extended Dahl's modellen

$$A_{lin} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} & a_{2,7} & a_{2,8} & a_{2,9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} & 0 & a_{5,8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (C.3.1)$$

Hvor  $A_{lin}$  er  $\in \mathbb{R}^{n,m}$  og  $a_{n,m}$  er:

$$a_{2,1} = -\frac{K_{12}}{I_1 N^2} \quad (C.3.2)$$

$$a_{2,2} = -\frac{d_{12}}{I_1 N^2} \quad (C.3.3)$$

$$a_{2,3} = \frac{K_{12}}{I_1 N} \quad (C.3.4)$$

$$a_{2,4} = \frac{d_{12}}{N I_1} - \frac{\alpha_2 + \sigma_1}{I_1} + \frac{x_5 \sigma_0 \sigma_1 \dot{x}_4 \operatorname{sgn}(x_4)}{I_1 \alpha_0} \quad (C.3.5)$$

$$a_{2,5} = -\frac{\sigma_0}{I_1} + \frac{|x_4| \sigma_0 \sigma_1}{I_1 \alpha_0} \quad (C.3.6)$$

$$a_{2,6} = -\frac{x_5}{I_1} + \frac{|x_4| x_5 \sigma_1}{I_1 \alpha_0} \quad (C.3.7)$$

$$a_{2,7} = -\frac{x_4}{I_1} + \frac{|x_4| x_5 \sigma_0}{I_1 \alpha_0} \quad (C.3.8)$$

$$a_{2,8} = -\frac{|x_4| x_5 \sigma_0 \sigma_1}{I_1 \alpha_0^2} \quad (C.3.9)$$

$$a_{2,9} = -\frac{x_4}{I_1} \quad (C.3.10)$$

$$a_{4,1} = \frac{K_{12}}{I_2 N} \quad (C.3.11)$$

$$a_{4,2} = \frac{d_{12}}{I_2 N} \quad (C.3.12)$$

$$a_{4,3} = -\frac{K_{12}}{I_2} \quad (C.3.13)$$

$$a_{4,4} = -\frac{d_{12}}{I_2} \quad (C.3.14)$$

$$a_{5,4} = 1 - \frac{x_5 \sigma_0 \dot{x}_4 \operatorname{sgn}(x_4)}{\alpha_0} \quad (\text{C.3.15})$$

$$a_{5,5} = -\frac{|x_4| \sigma_0}{\alpha_0} \quad (\text{C.3.16})$$

$$a_{5,6} = -\frac{|x_4| x_5}{\alpha_0} \quad (\text{C.3.17})$$

$$a_{5,8} = \frac{|x_4| x_5 \sigma_0}{\alpha_0^2} \quad (\text{C.3.18})$$

$$C_{lin} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.3.19})$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1/I_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \quad (\text{C.3.20})$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.3.21})$$

## C.4 EKF for parameter estimating

---

```

%EKF3_RWS_EDL
clear all;
load('egne_rnd_sin_100000_1KHz_b.mat'); % måledata
n=100000;
Ts=0.001;

K12=1.8e5; % Gear Stivhet
d12=1.1275e3; % Gear dempning
NG=80;
I1=0.0047;
%I2=17.5; % I last
I2=26; % I Last + nyttelast
IM=I1+(I2/NG^2);
% Extended Dahl init parametre
s0=1.0e4; % x6
s1=20;%2*sqrt(s0*IM); % x7
a0=0.7; % x8
a2=0.7; % x9

K12t = 0.178;
K12Scale = 0.4;

q=0.005;
rm=0.005;
r1=0.05;

R=diag([rm r1]);

x=[0 0 0 0 0 s0 s1 a0 a2]';

AA=[0 1 0 0 0 0 0 0 0
    -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1) (d12/(NG*I1) -...
    (x(9)+x(7))/I1) -x(6)/I1*(1-(x(7)*abs(x(4))/x(8))) 0 0 0 0
    0 0 0 1 0 0 0 0 0
    K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0 0 0 0 0
    0 0 0 1 -x(6)*abs(x(4))/x(8) 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0];
BB=[0 (K12Scale*K12t)/I1 0 0 0 0 0 0 0]';
LL=[0 1/I1 0 0 0 0 0 0 0]';
CC=[1 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 1 0 0 0 0 0 0];
DD=[0 0]';
Model=ss(AA,BB,CC,DD);
sys=c2d(Model,Ts);

A=sys.a;
B=sys.b;
C=sys.c;
D=sys.d;

P=diag([100000 100000 100000 100000 100000,...
    [1000 1 100 20]]); % P0 Med KPS data

```

```

% P=diag([100000 100000 100000 100000 100000 100000,...
% 100000 100000 100000]);% P0 Genererte data

u=simout_u_xm_xl(1:n,1);
ys=[simout_u_xm_xl(1:n,2:3)];

%Kalman filter
for i = 1:n
    %Time update (TO)
    AA=[0 1 0 0 0 0 0 0 0
        -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1) ,...
        (d12/(NG*I1)-(x(9)+x(7))/I1) -x(6)/I1*(1-(x(7)*...
        abs(x(4))/x(8))) 0 0 0 0
        0 0 0 1 0 0 0 0 0
        K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0 0 0 0 0
        0 0 0 1 -x(6)*abs(x(4))/x(8) 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0];
    [A,B]=c2d(AA,BB,Ts);
    x = A*x+B*u(i);
    AL=[0 1 0 0 0 0 0 0 0
        -K12/(I1*NG^2) ,...
        -d12/(I1*NG^2) ,...
        K12/(I1*NG) ,...
        (d12/(NG*I1))-(((x(7)+x(9))/I1)+(x(5)*x(6)*x(7)*...
        (K12/(NG*I2)*x(1)+d12/(NG*I2)*x(2)-K12/I2*x(3)-...
        d12/I2*x(4))*sign(x(4)))/(I1*x(8))) ,...
        -(x(6)*(1-((x(7)*abs(x(4))/x(8))))/I1) ,...
        -(x(5)*(1-((x(7)*abs(x(4))/x(8))))/I1) ,...
        (((x(5)*x(6)*abs(x(4)))/(I1*x(8)))-x(4)/I1) ,...
        -(x(5)*x(6)*x(7)*abs(x(4))/(I1*(x(8)^2))) ,...
        -x(4)/I1
        0 0 0 1 0 0 0 0 0
        K12/(I2*NG) ,...
        d12/(I2*NG) ,...
        -K12/I2 ,...
        -d12/I2 0 0 0 0 0
        0 0 0 (1-(x(6)*(K12/(NG*I2)*x(1)+d12/(NG*I2)*x(2)-...
        K12/I2*x(3)-d12/I2*x(4))*sign(x(4))*x(5)/x(8))) ,...
        -x(6)*abs(x(4))/x(8) ,...
        -x(5)*abs(x(4))/x(8) ,...
        0 (x(5)*x(6)*abs(x(4)))/(x(8)^2) 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0
        0 0 0 0 0 0 0 0 0];
    [A,B]=c2d(AL,BB,Ts);
    P = A*P*A' + LL*q*LL';
    %Observation update (MO)
    K = P*C'/(C*P*C' + R);
    x = x + K*(ys(i,:) - C*x);
    P = (eye(9) - K*C)*P;

% Lagrer x estimert
xest(:,i) = x;

```



```
end

% Estimate parametre
s0est=mean(xest(6,n-9999:n));
s1est=mean(xest(7,n-9999:n));
a0est=mean(xest(8,n-9999:n));
a2est=mean(xest(9,n-9999:n));
```

---

EKF3\_RWS\_EDL.m

## C.5 EKF for testing

---

```

%EKF_EDL_testing
clear all;
load('RWS_data_F112345p.mat'); % Laster inn måleserie

n=70000;
K12=1.8e5; % Gear Stivhet
d12=1.1275e3; % Gear dempning
NG=80; %N Gear
I1=0.0047; %I motor
%I2=17.5; % I last
I2=26; % I Last + nyttelast

Kt = 0.178; % Motorens momentkonstant
KScale = 0.4; % Skalering av pådraget

% Estimerte parametre
s0=1.0000e+004; % Bristle stivhet
s1=18.8288; % Bristle damping
a0=0.8025; % Fc
a2=1.2824; % Fv

Ts=0.001;

q=0.005;
rm=0.005;
rl=0.05;

R=diag([rm rl]);
x=[0 0 0 0 0]'; % x0
P=eye(5)*100000; % P0

AA=[0 1 0 0 0
     -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1) ,...
     (d12/(NG*I1)-(s1+a2)/I1) -s0/I1*(1-s1*abs(x(4)))*(1/a0))
     0 0 0 1 0
     K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0
     0 0 0 1 -s0*abs(x(4))*(1/a0)];
BB=[0 (KScale*Kt)/I1 0 0 0]';
LL=[0 1/I1 0 0 0]';
CC=[1 0 0 0 0
     0 0 1 0 0];
DD=[0 0]';
Model=ss(AA,BB,CC,DD);
sys=c2d(Model,Ts);

A=sys.a;
B=sys.b;
C=sys.c;
D=sys.d;

u=simout_u_xm_xl(1:n,1);
ys=simout_u_xm_xl(1:n,2:3);

%Kalman filter
for i = 1:n

```

```

%Time update (TO)
AA=[0 1 0 0 0
    -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1),...
    (d12/(NG*I1)-(s1+a2)/I1) -s0/I1*(1-s1*abs(x(4))*(1/a0))
    0 0 0 1 0
    K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0
    0 0 0 1 -s0*abs(x(4))*(1/a0)];
Model=ss(AA,BB,CC,DD);
sys=c2d(Model,Ts);
A=sys.a;
x = A*x+B*u(i);
AL=[0 1 0 0 0
    -K12/(I1*NG^2), -d12/(I1*NG^2), K12/(I1*NG),...
    d12/(I1*NG)-(a2+s1)/I1+(s0*s1*x(5)*(K12/(NG*I2)*x(1)+...
    d12/(NG*I2)*x(2)-K12/I2*x(3)-d12/I2*x(4))*sign(x(4)))/...
    (a0*I1)), -s0/I1+(s0*s1*abs(x(4)))/(a0*I1)
    0 0 0 1 0
    K12/(I2*NG), d12/(I2*NG), -K12/I2, -d12/I2, 0
    0 0 0 1-(s0*x(5)*(K12/(NG*I2)*x(1)+d12/(NG*I2)*x(2)-...
    K12/I2*x(3)-d12/I2*x(4))*sign(x(4))/a0),...
    -(s0*abs(x(4)))/a0];
Model=ss(AL,BB,CC,DD);
sys=c2d(Model,Ts);
A=sys.a;
P = A*P*A' + LL*q*LL';
%Observation update (MO)
K = P*C'/(C*P*C' + R);
x = x + K*(ys(i,:) - C*x);
P = (eye(5) - K*C)*P;
% Lagrer x estimert
xest(:,i) = x;
end

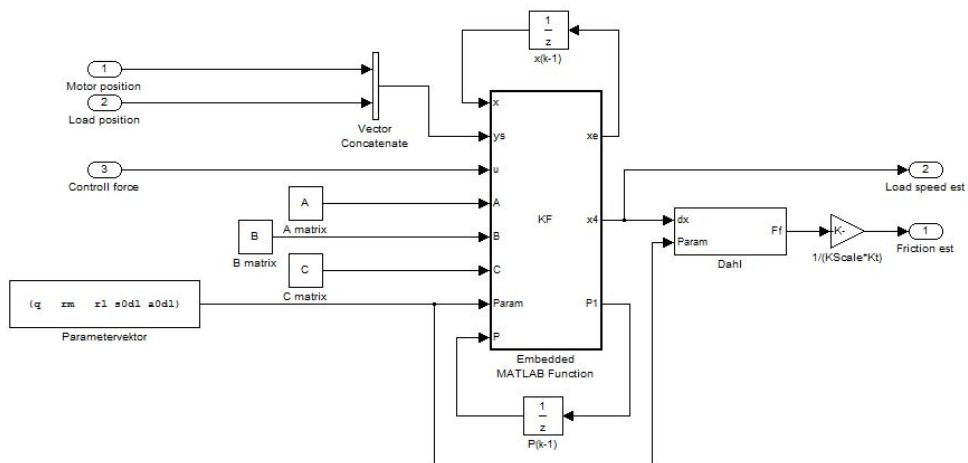
```



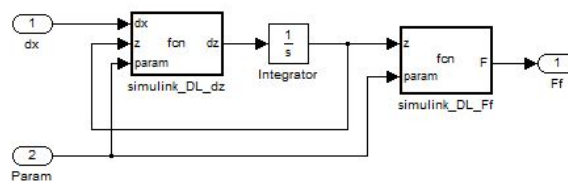
## Tillegg D

# Simuleringsmodellene og matriser

### D.1 Simuleringsmodellen for Dahl's modellen



Figur D.1.1: Simuleringsmodellen for Dahl's modellen



Figur D.1.2: Friksjonsmodell-blokken for Dahl's modellen laget i simulink.

---

```

function dz = fcn(dx,z,param)
s=param(4);
Fc=param(5);
dz=dx-((s*abs(dx)*z)/Fc);

```

---

simulink\_DL\_dz.m

---



---

```

function F = fcn(z,param)
s=param(4);
F = s*z;

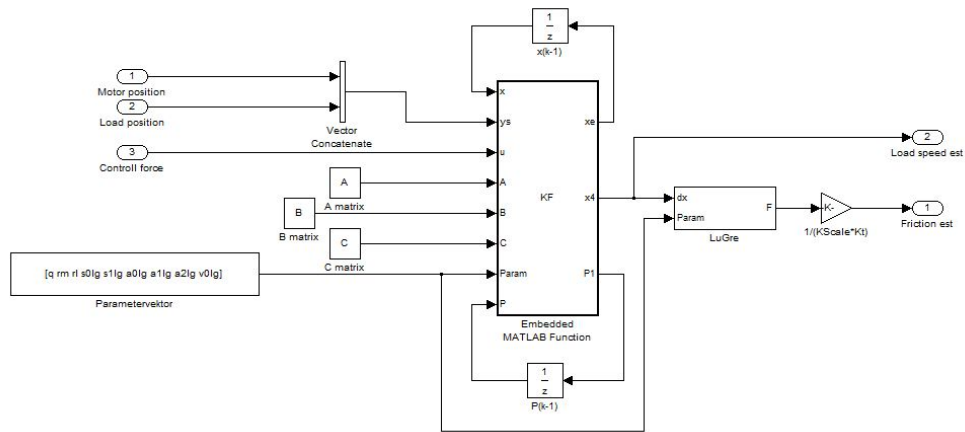
```

---

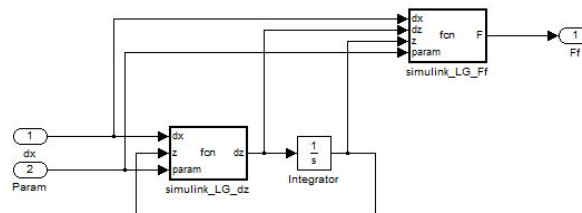
simulink\_DL\_Ff.m

---

## D.2 Simuleringsmodellen for LuGre modellen



Figur D.2.1: Simuleringsmodellen for LuGre modellen



Figur D.2.2: Friksjonsmodell-blokken for LuGre modellen laget i simulink.

---

```

function dz = fcn(dx,z,param)
alpha=2;
s0=param(4);
Fc=param(6);
Fs=param(6)+param(7);
vs=param(9);
g=Fc+((Fs-Fc)*exp(-((dx/vs)^alpha)));
dz=dx-((s0*abs(dx)*z)/g);

```

---

simulink\_LG\_dz.m

---

```

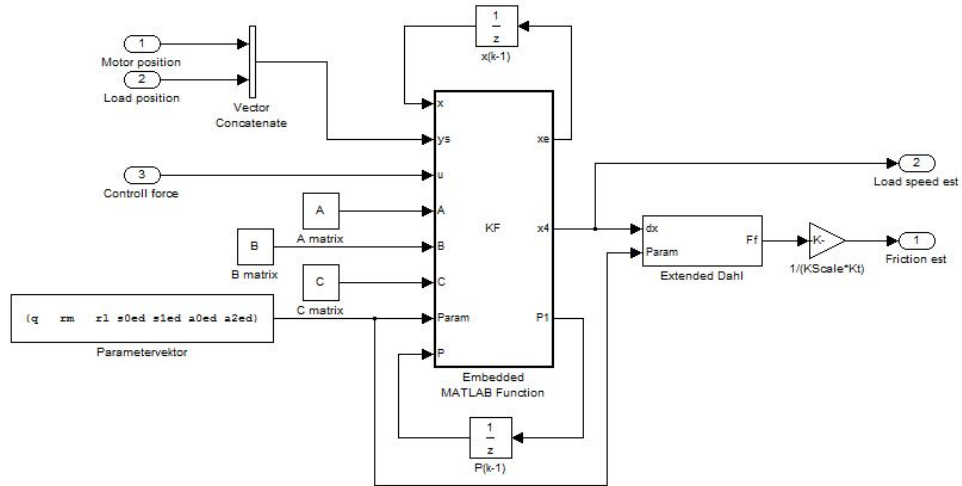
function F = fcn(dx,dz,z,param)
s0=param(4);
s1=param(5);
a2=param(8);
F = s0*z+s1*dz+a2*dx;

```

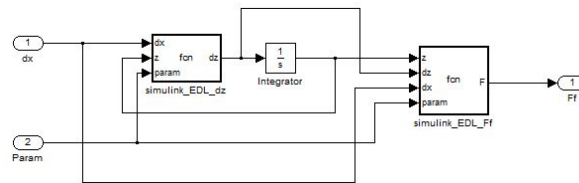
---

simulink\_LG\_Ff.m

### D.3 Simuleringsmodellen for Extended Dahl's modellen



Figur D.3.1: Simuleringsmodellen for Extended Dahl's modellen



Figur D.3.2: Friksjonsmodell-blokken for Extended Dahl's modellen laget i simulink.

---

```
function dz = fcn(dx,z,param)
```

```
s=param(4);
```

```
Fc=param(6);
```

```
dz=dx-((s*abs(dx)*z)/Fc);
```

---

```
simulink_EDL_dz.m
```

---

```
function F = fcn(z,dz,dx,param)
```

```
s0=param(4);
```

```
s1=param(5);
```

```
a2=param(7);
```

```
F = s0*z+s1*dz+a2*dx;
```

---

```
simulink_EDL_Ff.m
```



## D.4 Matlabkode for KF blokken og tilhørende matriser

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-K_{12}}{N^2 I_m} & \frac{-d_{12}}{N^2 I_m} & \frac{K_{12}}{N I_m} & \frac{d_{12}}{N I_m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_{12}}{N I_l} & \frac{d_{12}}{N I_l} & \frac{-K_{12}}{I_l} & \frac{-d_{12}}{I_l} \end{pmatrix} \quad (\text{D.4.1})$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K_{Scale} K_t}{I_m} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.4.2})$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.4.3})$$

Matlabkoden for Kalmanfilter blokken brukt i simulink.

---

```
function [xe,x4,P1]=KF(x,ys,u,A,B,C,Param,P)
```

```
    na=size(A);
    q=Param(1);
    rm=Param(2);
    rl=Param(3);
    R=diag([rm rl]);
```

```
% KF-algoritme
% Time update (TO)
    x = A*x+B*u;
    P = A*P*A' + B*q*B';
% Observation update (MO)
    K = P*C'/(C*P*C' + R);
    x = x + K*(ys - C*x);
    P = (eye(na(1)) - K*C)*P;
```

```
    xe=x;
    x4=x(4);
    P1=P;
```

---

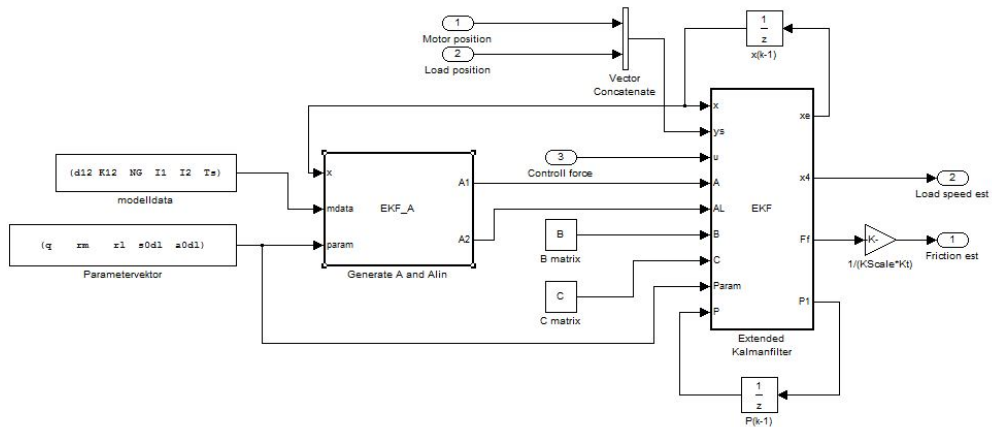
simulink\_KF.m



## Tillegg E

# Implementeringsmodellene og matriser

### E.1 Implementeringsmodellen for Dahl's modellen



Figur E.1.1: Implementeringsmodellen for Dahl's modellen

---

```

function [A1,A2]=EKF_A(x,mdata,param)
d12=mdata(1);% Gear dempning
K12=mdata(2);% Gear Stivhet
NG=mdata(3);% N Gear
I1=mdata(4);% I motor
I2=mdata(5);% I last

Ts=mdata(6);
s0d1=param(4);
a0d1=param(5);

AA=[0 1 0 0 0
    -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1) d12/(NG*I1) 0
    0 0 0 1 0
    K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0
    0 0 0 1 -s0d1*abs(x(4))/a0d1];
    
```

```

AL=[0 1 0 0 0
    -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1) d12/(NG*I1) 0
    0 0 0 1 0
    K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0
    0 0 0 1-s0dl/a0dl*(K12/(NG*I2)*x(1)+d12/(NG*I2)*x(2)-...
    K12/I2*x(3)-d12/I2*x(4))*sign(x(4))*x(5),...
    -s0dl/a0dl*abs(x(4))];

```

```

A1=expm(AA*Ts); % Diskretisering
A2=expm(AL*Ts);

```

---

DL\_EKF\_A.m

---

```

function [xe,x4,Ff,P1]=EKF(x,ys,u,A,AL,B,C,Param,P)

```

```

    na=5;
    q=Param(1);
    rm=Param(2);
    rl=Param(3);
    s0=Param(4);

    R=diag([rm rl]);
    L=[0 1/0.0047 0 0 0]';
    %Time update (TO)
    x = A*x+B*u;
    P = AL*P*AL' + L*q*L';
    %Observation update (MO)
    K = P*C'/(C*P*C' + R);
    x = x + K*(ys - C*x);
    P = (eye(na(1)) - K*C)*P;

    Ff=s0*x(5);
    xe=x;
    x4=x(4);
    P1=P;

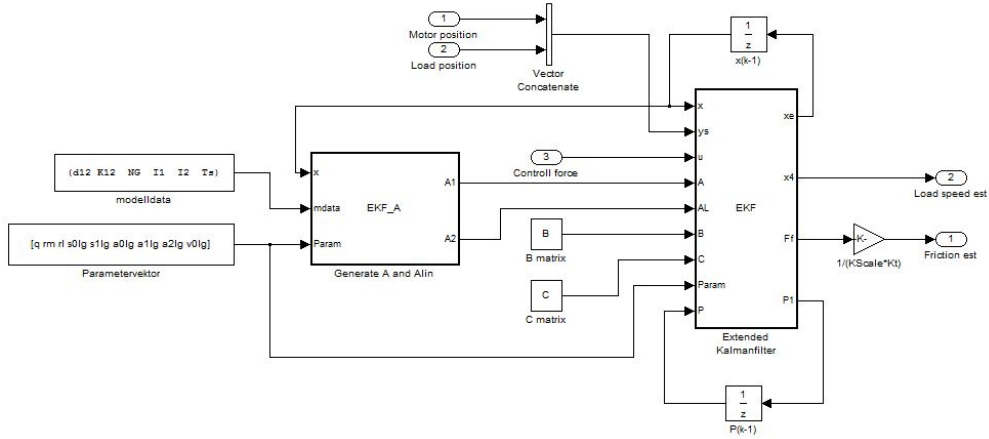
```

---

DL\_EKF.m

---

## E.2 Implementeringsmodellen for LuGre modellen



Figur E.2.1: Implementeringsmodellen for LuGre modellen

---

```

function [A1,A2]=EKF_A(x,mdata,Param)
d12=mdata(1);% Gear dempning
K12=mdata(2);% Gear Stivhet
NG=mdata(3);% N Gear
I1=mdata(4);% I motor
I2=mdata(5);% I last

Ts=mdata(6);
s0=Param(4);
a0=Param(6);
a1=Param(7);
v0=Param(9);

AA=[0 1 0 0 0
    -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1) d12/(NG*I1) 0
    0 0 0 1 0
    K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0
    0 0 0 1 -s0*abs(x(4))*(1/(a0+a1*exp(-(x(4)/v0)^2)))]];

AL=[0 1 0 0 0
    -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1) d12/(NG*I1) 0
    0 0 0 1 0
    K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0
    0 0 0 1 -(2*a1*exp(-(x(4)^2/v0^2))*s0*x(4)*x(5)*abs(x(4)))/...
    ((a0+a1*exp(-(x(4)^2/v0^2)))^2*v0^2)-...
    (s0*x(5)*(K12/(NG*I2)*x(1)+d12/(NG*I2)*x(2)-K12/I2*x(3)-...
    d12/I2*x(4))*sign(x(4)))/(a0+a1*exp(-(x(4)^2/v0^2))),...
    -(s0*abs(x(4)))/(a0+a1*exp(-(x(4)^2/v0^2)))]];

A1=expm(AA*Ts);
A2=expm(AL*Ts);

```

---

LG\_EKF\_A.m

---

```

function [xe,x4,Ff,P1]=EKF(x,ys,u,A,AL,B,C,Param,P)

```

---

```

na=5;
q=Param(1);
rm=Param(2);
rl=Param(3);
s0=Param(4);

R=diag([rm rl]);
L=[0 1/0.0047 0 0 0]';
%Time update (TO)
x = A*x+B*u;
P = AL*P*AL' + L*q*L';
%Observation update (MO)
K = P*C'/(C*P*C' + R);
x = x + K*(ys - C*x);
P = (eye(na(1)) - K*C)*P;

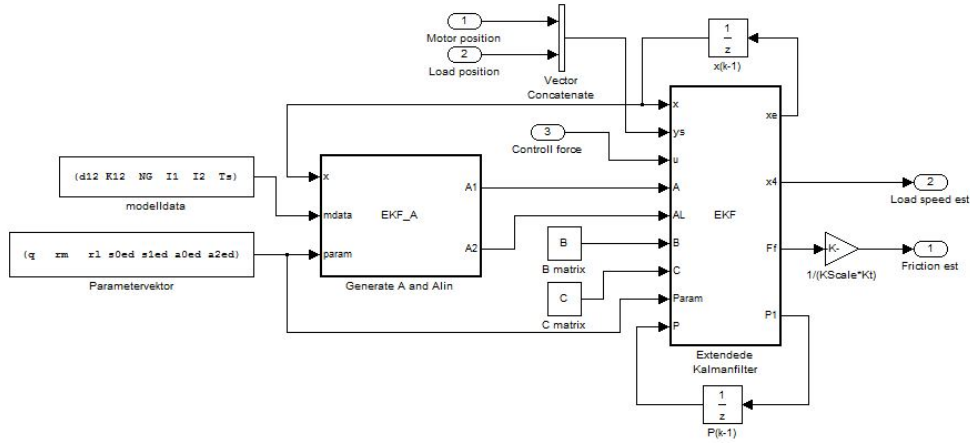
Ff=s0*x(5);
xe=x;
x4=x(4);
P1=P;

```

---

LG\_EKF.m

### E.3 Implementeringsmodellen for Extended Dahl's modellen



Figur E.3.1: Implementeringsmodellen for Extended Dahl's modellen

---

```

function [A1,A2]=KF_ABC(x,mdata,param)
d12=mdata(1);% Gear dempning
K12=mdata(2);% Gear Stivhet
NG=mdata(3);% N Gear
I1=mdata(4);% I motor
I2=mdata(5);% I last

Ts=mdata(6);
s0ed=param(4);
a0ed=param(6);

AA=[0 1 0 0 0
    -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1) d12/(NG*I1) 0
    0 0 0 1 0
    K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0
    0 0 0 1 -s0ed*abs(x(4))/a0ed];

AL=[0 1 0 0 0
    -K12/(NG^2*I1) -d12/(NG^2*I1) K12/(NG*I1) d12/(NG*I1) 0
    0 0 0 1 0
    K12/(NG*I2) d12/(NG*I2) -K12/I2 -d12/I2 0
    0 0 0 1-s0ed/a0ed*(K12/(NG*I2)*x(1)+d12/(NG*I2)*x(2)-...
    K12/I2*x(3)-d12/I2*x(4))*sign(x(4))*x(5),...
    -s0ed/a0ed*abs(x(4))];

A1=expm(AA*Ts);
A2=expm(AL*Ts);

```

---

EDL\_EKF\_A.m

---

```

function [xe,x4,Ff,P1]=EKF(x,ys,u,A,AL,B,C,Param,P)

```

```

na=5;

```

```

q=Param(1);
rm=Param(2);
rl=Param(3);
s0=Param(4);

R=diag([rm rl]);
L=[0 1/0.0047 0 0 0]';
%Time update (TO)
x = A*x+B*u;
P = AL*P*AL' + L*q*L';
%Observation update (MO)
K = P*C'/(C*P*C' + R);
x = x + K*(ys - C*x);
P = (eye(na(1)) - K*C)*P;

Ff=s0*x(5);
xe=x;
x4=x(4);
P1=P;

```

---

EDL\_EKF.m



### E.4 Matrisene $A$ og $A_{lin}$ for Dahl's og Extended Dahl's

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-K_{12}}{N^2 I_m} & \frac{-d_{12}}{N^2 I_m} & \frac{K_{12}}{N I_m} & \frac{d_{12}}{N I_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{K_{12}}{N I_l} & \frac{d_{12}}{N I_l} & \frac{-K_{12}}{I_l} & \frac{-d_{12}}{I_l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\sigma_1 |x_4|}{\alpha_0} \end{pmatrix} \quad (\text{E.4.1})$$

$$A_{lin} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-K_{12}}{N^2 I_m} & \frac{-d_{12}}{N^2 I_m} & \frac{K_{12}}{N I_m} & \frac{d_{12}}{N I_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{K_{12}}{N I_l} & \frac{d_{12}}{N I_l} & \frac{-K_{12}}{I_l} & \frac{-d_{12}}{I_l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{z\sigma_0 \dot{x}_4 \operatorname{sgn}(x_4)}{\alpha_0} & -\frac{|x_4| \sigma_0}{\alpha_0} \end{pmatrix} \quad (\text{E.4.2})$$

### E.5 Matrisene $A$ og $A_{lin}$ for LuGre

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-K_{12}}{N^2 I_m} & \frac{-d_{12}}{N^2 I_m} & \frac{K_{12}}{N I_m} & \frac{d_{12}}{N I_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{K_{12}}{N I_l} & \frac{d_{12}}{N I_l} & \frac{-K_{12}}{I_l} & \frac{-d_{12}}{I_l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\sigma_1 |x_4|}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-\left(\frac{x_4}{v_0}\right)^2}} \end{pmatrix} \quad (\text{E.5.1})$$

$$A_{lin} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-K_{12}}{N^2 I_m} & \frac{-d_{12}}{N^2 I_m} & \frac{K_{12}}{N I_m} & \frac{d_{12}}{N I_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_{12}}{N I_l} & \frac{d_{12}}{N I_l} & \frac{-K_{12}}{I_l} & \frac{-d_{12}}{I_l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{2e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} |x_4| x_4 x_5 \alpha_1 \sigma_0}{v_0^2 \left( \alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1 \right)^2} - \frac{x_5 \sigma_0 \dot{x}_4 \operatorname{sgn}(x_4)}{\alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1} & -\frac{|x_4| \sigma_0}{\alpha_0 + e^{-\frac{x_4^2}{v_0^2}} \alpha_1} \end{pmatrix} \quad (\text{E.5.2})$$



## Tillegg F

# Parameterestimering med KPS data

### F.1 Tabell med resultater av parameterestimering

**Resultater for Dahl's modell**

Parameter	Data serie			Mean
	D1	D2	D3	
s0	9,99E+03	1,00E+04	1,00E+04	9995,8889
a0	1,10634714	0,89707173	0,80906227	0,93749371

**Resultater for Extended Dahl's modell**

Parameter	Data serie			Mean
	D1	D2	D3	
s0	1,00E+04	1,00E+04	1,00E+04	9999,99316
s1	18,905338	18,7387866	18,8422132	18,8287793
a0	0,8707624	0,7297385	0,80690835	0,80246975
a2	0,76501142	1,5441593	1,53815449	1,28244174

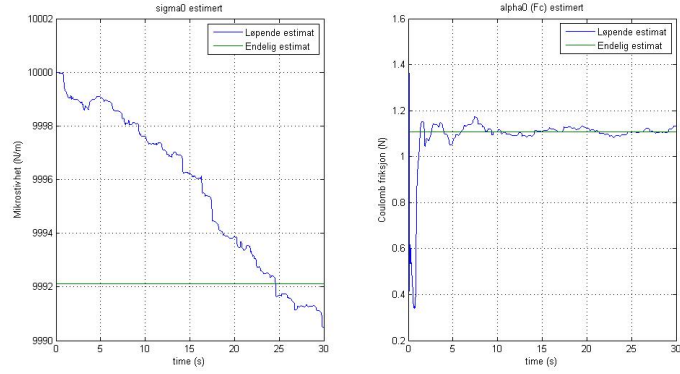
**Resultater for LuGre Modellen**

Parameter	Data serie			Mean
	D1	D2	D3	
s0	1,00E+04	1,00E+04	1,00E+04	10000,0033
s1	18,7216	19,0975579	18,8816077	18,9002552
a0	0,904094	0,76652476	0,78517588	0,81859822
a1	0,49653781	0,49658602	0,47666092	0,48992825
a2	0,7780816	1,07767405	0,86065428	0,90546998
v0	0,0067306	0,00807714	0,00157439	0,00546071

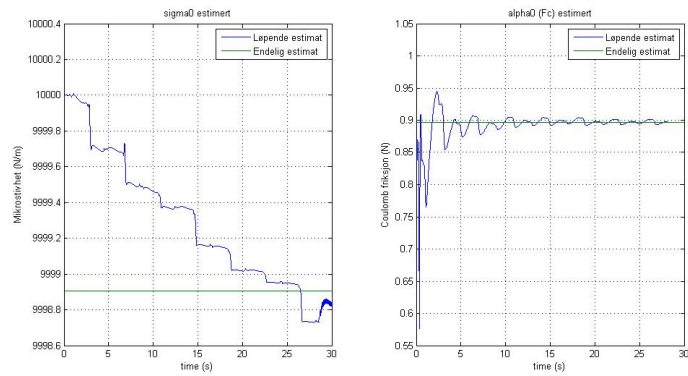
Figur F.1.1: Resultatene for alle måleseriene og midlede parametre

## F.2 Plot for parameterestimering

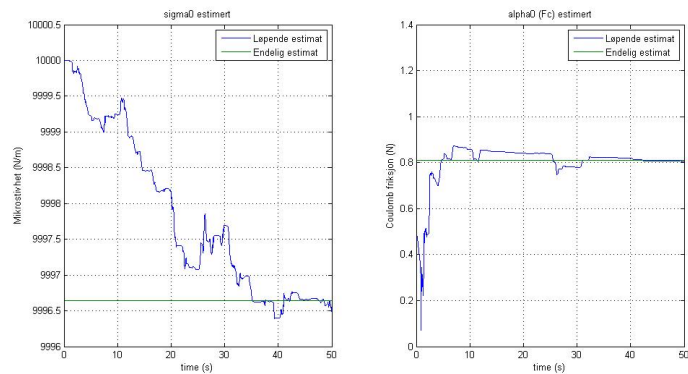
### F.2.1 Dahl's modell



Figur F.2.1: Plott for estimerte parametre Dahl's modell med dataserie D1

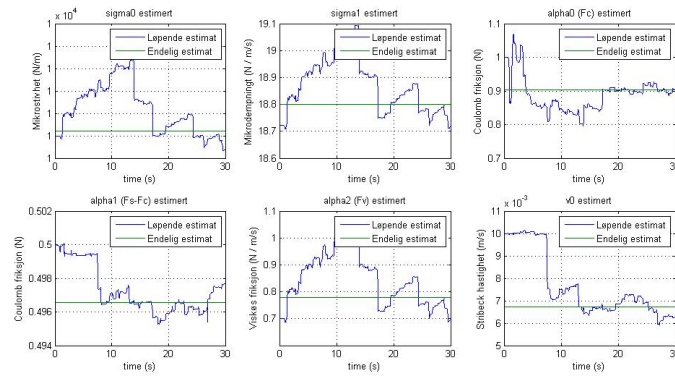


Figur F.2.2: Plott for estimerte parametre Dahl's modell med dataserie D2

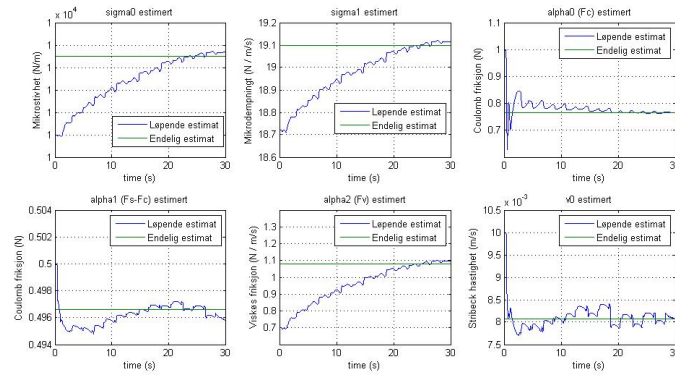


Figur F.2.3: Plott for estimerte parametre Dahl's modell med dataserie D3

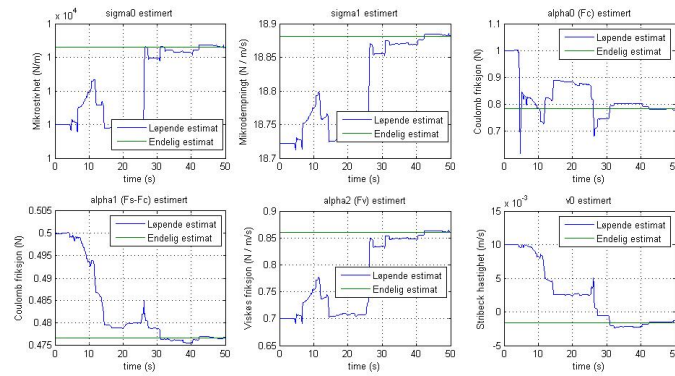
## F.2.2 LuGre modellen



Figur F.2.4: Plott for estimerte parametre LuGre modell med dataserie D1

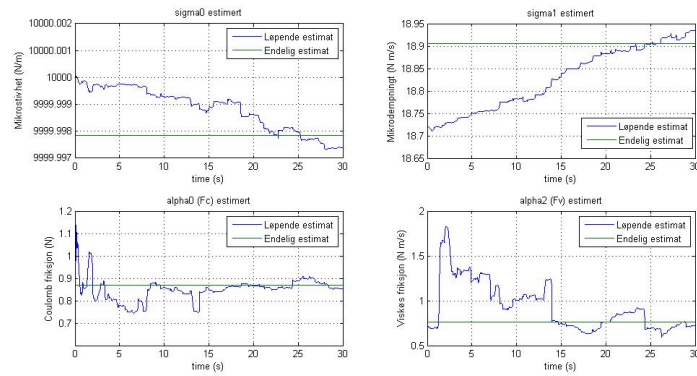


Figur F.2.5: Plott for estimerte parametre LuGre modell med dataserie D2

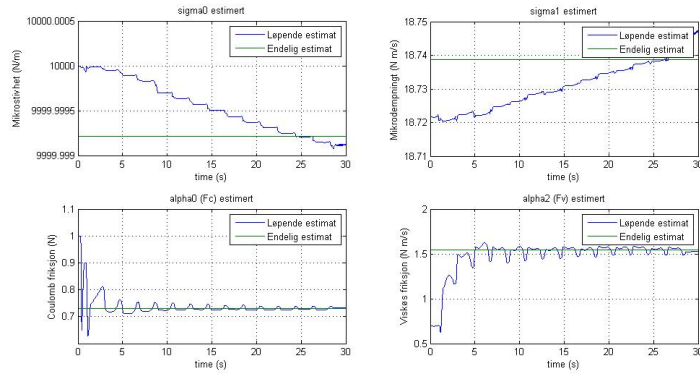


Figur F.2.6: Plott for estimerte parametre LuGre modell med dataserie D3

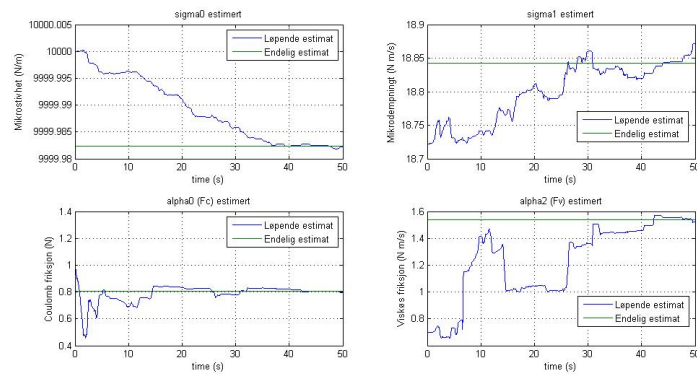
### F.2.3 Extended Dahl's modell



Figur F.2.7: Plott for estimerte parametre Extended Dahl's modell med dataserie D1



Figur F.2.8: Plott for estimerte parametre Extended Dahl's modell med dataserie D2



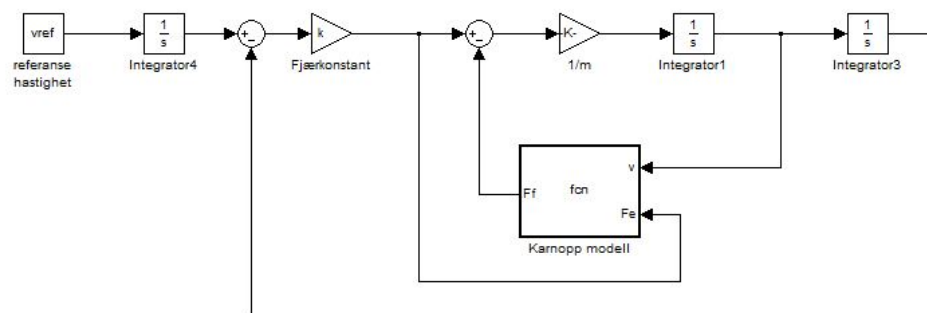
Figur F.2.9: Plott for estimerte parametre Extended Dahl's modell med dataserie D3

## Tillegg G

# Noen simulerte eksperimenter

### G.1 Lite Stick-Slip eksperiment

#### G.1.1 Simulink modellen



Figur G.1.1: Simuleringsmodell for lite stick-slip eksperiment.

#### G.1.2 Karnoppmodellen brukt i simulink

---

```
function Ff = fcn(v,Fe)
%#eml
Fs=2;
Fc=1.5;
if abs(v)<0.01
    if abs(Fe)<Fs
        Ff=Fe;
    else
        Ff=Fs*sign(Fe);
    end
else
    Ff=Fc*sign(v);
end
```

---

simulink\_karnopp.m

### G.1.3 Matlab simulerings fil

---

```
m=1;
vref=0.2;
k=10;

sim('stick_slip_eksperiment',10)

subplot(3,1,1)
plot(simout.time,[simout.signals.values(:,1),...
    simout.signals.values(:,2)]),grid on
legend('x1_posisjon_fjær','x2_posisjon_kloss')
xlabel('Tid(s)')
ylabel('Posisjon(m)')

subplot(3,1,2)
plot(simout.time,[simout.signals.values(:,4),...
    simout.signals.values(:,5)]),grid on
legend('Friksjonskraft','Fjærkraft')
xlabel('Tid(s)')
ylabel('Kraft(N)')

subplot(3,1,3)
plot(simout.time,simout.signals.values(:,3)),grid on
legend('Klossens_hastighet')
xlabel('Tid(s)')
ylabel('Hastighet(m/s)')
```

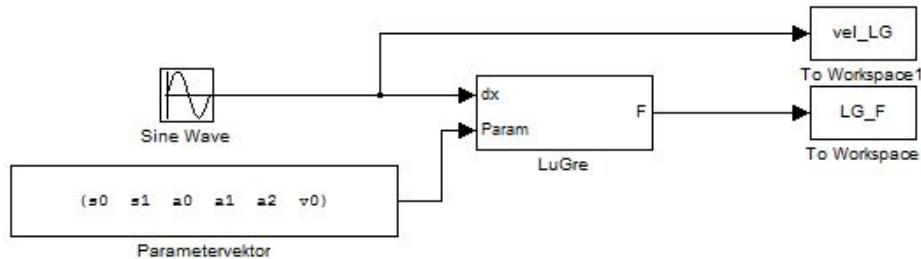
---

stick\_slip\_eksperiment\_parametre.m



## G.2 Hysterese eksperiment for LuGre modellen

### G.2.1 Simulink modellen



Figur G.2.1: Simuleringsmodell hysterese eksperiment.

### G.2.2 Matlab simulerings fil

---

```

clear all;
close all;
s0=1e5;
s1=2*sqrt(s0);
a0=1;
a1=0.5;
a2=0.5;
v0=0.001;
f=1;
amp=1.15e-3;
bias=1.5e-3;
Ts=1e-4;
Tsim=10;
start=10000;
sim('lag',Tsim);
n=length(vel_LG1);
figure(1)
hold on
plot(vel_LG1(start:n),LG_F1(start:n),'Color','black'),...
plot(vel_LG5(start:n),LG_F5(start:n),'Color','blue'),...
plot(vel_LG10(start:n),LG_F10(start:n),'Color','red'),...
plot(vel_LG25(start:n),LG_F25(start:n),'Color','magenta'),...
hold off
title('Hysterese_kurve_for_LuGre'),grid on,axis([0 3e-3 0.9 1.5])
xlabel('Hastighet [m/s]')
ylabel('Friksjonskraft [N]')
legend('frekvens=1 rad/s','frekvens=5 rad/s',...
'frekvens=10 rad/s','frekvens=25 rad/s')

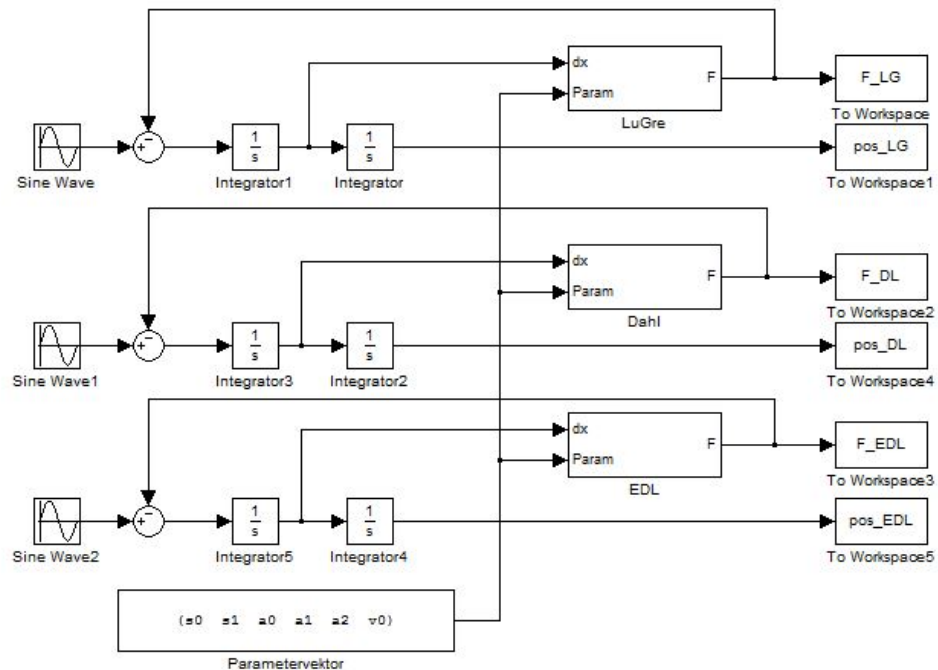
```

---

lag\_hysterese\_LG.m

## G.3 Presliding eksperiment for friksjonsmodellene

### G.3.1 Simulink modellen



Figur G.3.1: Simuleringsmodell for presliding eksperiment.

### G.3.2 Matlab simulerings fil

```
clear all;
s0=1e4;
s1=2*sqrt(s0);
a0=1;
a1=0.5;
a2=0.5;
v0=0.01;
f=0.2;

sim('presliding',300);

figure (1)
plot(pos_LG,F_LG)
title('Pre-sliding_bevægelse_LuGre modellen'),grid on
xlabel('Forskyvning [m]')
ylabel('Friksjonskraft [N]')
figure (2)
plot(pos_DL,F_DL)
title('Pre-sliding_bevægelse_Dahls modellen'),grid on
xlabel('Forskyvning [m]')
ylabel('Friksjonskraft [N]')
```

```
figure (3)
plot(pos_EDL,F_EDL)
title( 'Pre-sliding_bevægelse_Extended_Dahls modellen' ),grid on
xlabel( 'Forskyvning [m]' )
ylabel( 'Friksjonskraft [N]' )
```

---

presliding\_run.m



## Tillegg H

# Modellen levert fra KPS

### H.1 Simulinkmodellen levert av KPS

Se figur H.1.1

### H.2 Matlabkode med parametre til simulinkmodellen

---

```
%Sampletime servsystem
T = 1e-3;

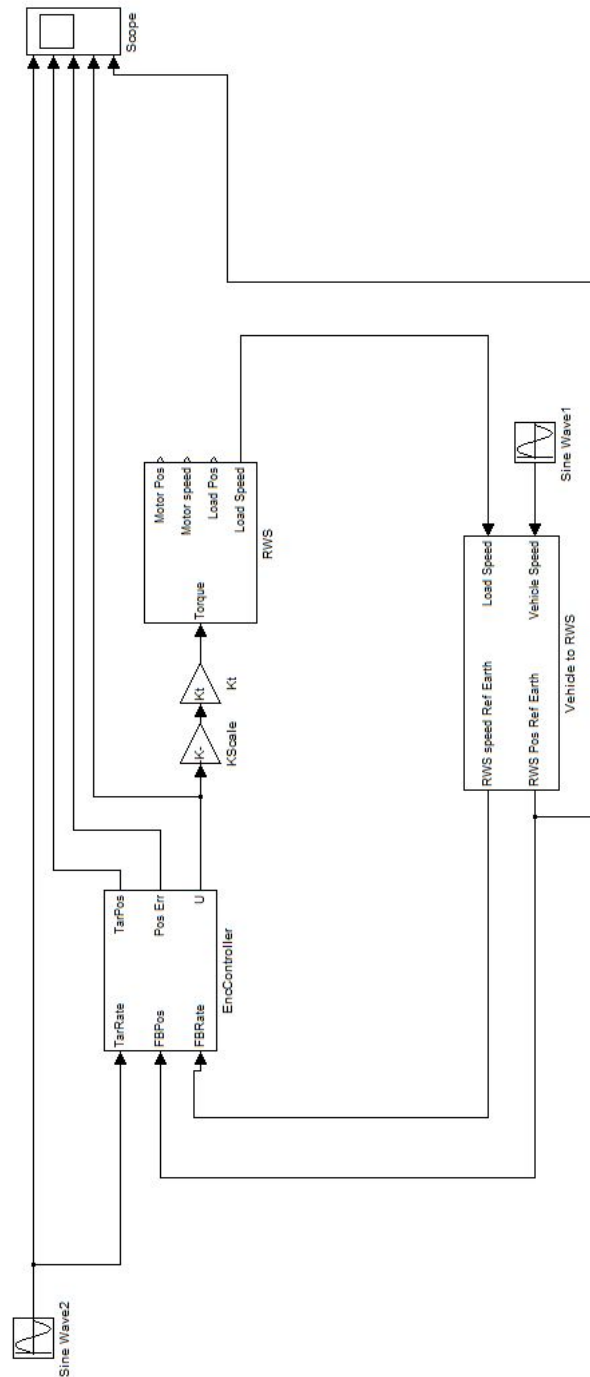
%Main Azimuth gear
K12=1.8e5;
IGear = 8.68e-4 ;
Ratio = 1/80;

%Main Azimuth Motor
IMotor = 3.8e-3;
Kt = 0.178;
KScale = 0.4;

%ILoad = 17.5; % Uten last
ILoad = 26; % Med last
Itot = IMotor + IGear + ILoad*(Ratio^2) ;
I1 = (IMotor + IGear);
I2 = ILoad;
Imerk = (I1*I2/Itot);
w = sqrt(K12/Imerk);
f = w / 2 / pi;

%REAL DRIVETRAIN
%Torque to Speed
rho = 0.4;
d1 = 0.0;
d12 = 2*rho*K12/w;
d2 = 0.0;

%MotorSide
H1 = [I1, d1+Ratio^2*d12, Ratio^2*K12];
%LoadSide
H2 = [I2, d2+d12, K12];
```



Figur H.1.1: Simulinkmodellen levert av KPS

## H.2. MATLABKODE MED PARAMETRE TIL SIMULINKMODELLEN 119

```

H3 = [Ratio*d12, Ratio*K12];

%Transfer function from torque to motor speed
TFDriveTrainModelTM = tf([H2,0],[conv(H1,H2)]-...
    [0,0,conv(H3,H3)]);

%Transfer function from torque to load speed
TFDriveTrainModelTL = tf([H3,0],[conv(H1,H2)]-...
    [0,0,conv(H3,H3)]);
%Transfer function from motor speed to
%load speed (transmission):
TFtransmission = tf(H3,H2);

TFDriveTrainModelTLSimpl = Kt*KScale*Ratio*...
    tf([1,0],[Itot,0,0]);

%***** Controller Start*****
%**Feedback from motor speed and position
%**referenced to load*

%PID speed controller
KpV = 50;%190;
KiV = 0.0;
KdV = 0.0;

KpVLim = 100.0;
KiVLim = 100.0;
KdVLim = 100.0;

Hcv = tf([KdV,KpV,KiV],[1,0]);

%Integrator from speed to pos
Hcp1 = tf([1],[1,0]);

%PID pos controller
KpP = 20;%12.0;
KiP = 0;%190.0;
KdP = 0.0;

KpPLim = 0.4;
KiPLim = 0.14;
KdPLim = 100;

%Integrator from speed to pos
Hcp1 = tf([1],[1,0]);
%Position controller transfer function
Hcp2 = tf([KdP,KpP,KiP],[1,0]);

%Total controller using position error
Hcp = Hcp1*Hcp2;

%Notch filter
alfa = 0.357; %Notch attuation
w = 2*pi*20.5; %Notch frequency
Notch = tf([1,2*alfa*w,w^2],[1,2*w,w^2]);

```

*%Total control loop including Pos, Speed and Notch!*  
HcDefault = (Hcp + 1)\*Hcv\*Notch;

*%\*\*\*\*\**  
*%\*\*\*\*\* Controller End \*\*\*\*\**

---

original\_MainAzimuthParam.m